$$z^2+1=z^2-i^2 \Rightarrow z(z^2-i^2)+2(z+i)=0$$

$$(z+i)(z(z-i)+2)=0 \Rightarrow z=-i$$ در گزینه‌ها هست

$$z^2-iz+2=0 \qquad z=\frac{i\pm\sqrt{-1-8}}{2}=2i\,,\,-i$$

$$\pm 3i$$

مثال 5: در رابطه $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ مطلوب است اعداد x و y.

$$3x+5y+i(2y-x)=7+5i$$

$$\begin{cases}3x+5y=7\\ 2y-x=5\end{cases}$$

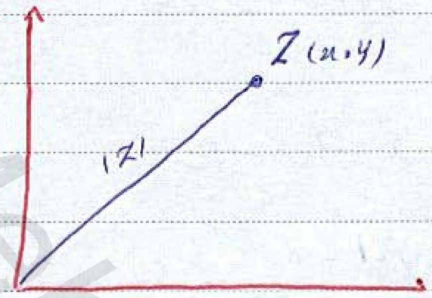
1 قدر مطلق $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

2 $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$ 3 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

4 $|z|=|\bar{z}|$ 5 $|z^2|=z\bar{z}$

مثال 6: اگر a و b اعداد حقیقی باشند مقدار عبارت $\left|\frac{a+ib}{b+ia}\right|=?$ کدام است؟

$$\frac{|a+ib|}{|b+ia|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+a^2}}=1$$



$|Z|$ = فاصله نقطه Z از مبدأ

$|Z_1-Z_2|$ = فاصله دو نقطه Z_1 و Z_2

$|Z|=1$ = دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع 1

$|Z-Z_0|$ = مکان هندسی نقاط Z از نقطه ثابت Z_0

$|Z-Z_0|=4$ = دایره‌ای به مرکز Z_0 و شعاع 4

مثال 7 ـ معادله $|Z-1|+|Z+1|=2\sqrt{2}$ چه مکانی را نشان می‌دهد بیضی

بیضی مکان هندسی نقاطی است که مجموع آنها از دو نقطه ثابت مقداری ثابت شود
هذلولی 〃 〃 〃 〃 تفاضل 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃

$|Z-1|-|Z+1|=2\sqrt{2}$ => هذلولی

$9 \geq |Z-1+i| \geq 4$ فضای بین دو دایره به شعاع 4 و 9 و مرکز دایره $1-i$

مثال 8 ـ عدد مختلط Z_1 ثابت است و $Z \neq Z_1$ نیز در معادلات $|Z|=|Z_1|$ و $|\bar{Z}-Z_1|=|1-Z|$ در این صورت.

1- $Z=\bar{Z}_1$ شامل سه گزینه دیگر هست ✓

2- $Z_1=i$ و $Z=-i$

3- $Z_1=1+i$ و $Z=1-i$

4- $Z_1=iy_1$ و $Z=-iy_1$

Year. Month. Date. ( )

مثال ۹- .

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$$

1 بیضی
2 خط راست
3 سهمی
4 دایره ✓

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = 2 \Rightarrow |z-1| = 2|z+1|$$

حاصل‌تقسیم دو عدد مختلط کدامی است مختلط

$|z'| = 2 \Rightarrow$ دایره

مثال ۱۰- مکان اعداد مختلط $\left|\frac{z+i}{z-i}\right| = \sqrt{2}$ کدام است

1 خط $y = x$
2 دایره ای به مرکز $(3,0)$ و شعاع $2\sqrt{2}$
3 دایره‌ای به مرکز $(1,1)$ و شعاع $2\sqrt{2}$
4 دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع $2\sqrt{2}$

$$|z+i| = \sqrt{2}\,|z-i| \qquad |x+(1+y)i| = \sqrt{2}\,|x+i(y-1)|$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{2}\times\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$x^2+(y+1)^2 = 2\left(x^2+(y-1)^2\right) \qquad x^2+y^2-6y+1=0$$

$$x^2+(y-3)^2 = 8$$

دایره ای به مرکز $(0,3)$ و شعاع $2\sqrt{2}$

P4PCO

مثال 11 - $z=x+iy$, $w=u+iv$, $w=\frac{2}{z}$

مقدار x برحسب u و v کدام است.

$$z=\frac{2}{w} \Rightarrow z=\frac{2}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}=\frac{2u-2iv}{u^2+v^2}=\frac{2u}{u^2+v^2}+i\frac{2v}{u^2+v^2}$$

چون مقدار x را می‌خواهد به جای $w=\frac{2}{z}$ مقدار $z=\frac{2}{w}$ می‌گذاریم $x=\frac{2u}{u^2+v^2}$

مثال 12 - اگر z_1 و z_2 جوابهای معادله $z^2+z+1=i$ باشد، $|z_1-z_2|$ کدام است

$\sqrt{2}$

$\sqrt{3}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{10}$

$$z^2+z+1-i=0 \qquad z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1-i)}}{2}$$

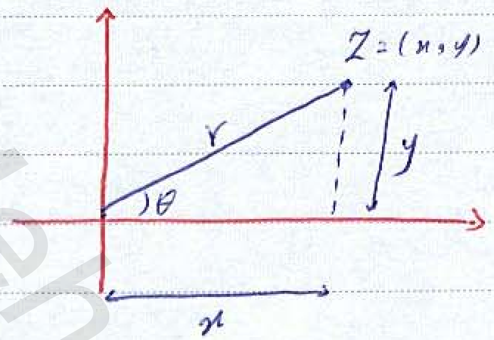
$$z=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{i-\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{2}+\sqrt{\quad}-\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\quad}\right)=2\sqrt{i-\frac{3}{4}}$$

$$\left|i-\frac{3}{4}\right|=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4} \Rightarrow \left|2\sqrt{i-\frac{3}{4}}\right|=2\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{5}$$

مثال 13 مکان نقاطی که در $2>|z-i|>1$ صدق می‌کند کدام هستند. نقاط بین دو دایره به مرکز i

شکل قطبی اعداد مختلط :



r: اندازه Z

θ: آرگومان Z $\quad Arg(Z)=\theta$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \theta = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

		θ	r
$1+i$	ربع اول	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$1-i$	ربع چهارم	$\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$-1+i$	ربع دوم	$\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$-1-i$	ربع سوم	$\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	$\sqrt{2}$

فرم قطبی Z

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

کاربرد در معادلات یا در عبارات بالا

$$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$z=1 \Rightarrow r=1 , \theta=0$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$z^n = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$

$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ فرمول دموآور

مثال ۱۴ اگر z_1 و z_2 به صورت زیر باشند حاصل $z_1 z_2^2$ کدام است.

$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)$ -6 ✓

$-6i$

$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$ 6

$6i$

$z_1 z_2^2 = 6(\overset{-1}{\cos\pi} + i\sin\pi) = -6$

یا

$z_2^2 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{7}+i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$

$z_1 z_2^2 = 6\left(\cos\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)\right) = -6$

مثال 15 - حاصل $e^{\frac{1}{2}\pi i}$ کدام است

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

مثال 16 - اگر $a(\cos x + i\sin x) = 1-i$ ، x کدام است

$$a(\cos x + i\sin x) = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = re^{i\theta}$$

1- $\frac{\pi}{4}$ 2- $\frac{3\pi}{4}$ 3- $\frac{5\pi}{4}$ 4- $\frac{7\pi}{4}$ ✓

مثال 17 - حاصل عبارت $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ کدام است .

صورت و مخرج دارای ۲ برابر هستند
⇐ ۲ نداریم .

$$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال 18 - اگر $z = \frac{1-i}{1+i}$ حاصل $ze^{i\frac{\pi}{2}}$ کدام است

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad i \cdot z = \frac{i+1}{1+i} = 1$$

1. -1
2. $-1+i$
3. $1-i$
4. 1

مثال 19 اگر a و b ریشه های مختلط معادله $z^2 - 2z + 4$ باشد آنگاه مقدار $a^n + b^n + ab$ کدام است .

جواب: $2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3} + 4$

$1 \pm \sqrt{1-4} \Rightarrow a = 1 + i\sqrt{3}$, $b = 1 - i\sqrt{3}$

$r = 2$ $r = 2$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$a^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$b^n = 2^n e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \cancel{i\sin\frac{n\pi}{3}}\right) + 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cancel{i\sin\frac{n\pi}{3}}\right) + 4(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$= 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3} + 4$$

ریشه‌های n ام یک عدد مختلط

برای گرفتن ریشه n ام یک عدد مختلط باید از دستگاه مختصات قطبی استفاده نمود

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ریشه n ام z عدد مختلطی است مانند z_0 که اگر به توان n برسد مساوی خود z شود

$z = z_0^n$ $z_0 \Rightarrow r_0 , \theta_0$

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = r_0^n(\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0)$$

$r_0 = \sqrt[n]{r}$

$n\theta_0 = 2k\pi + \theta \Rightarrow \theta_0 = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

جواب بازای $k=n$ با جواب $k=1$ برابر است

مثال 20- ریشه های 3 عدد مختلط $z=-1-i$ را تعیین کنید

$r = \sqrt{2} \qquad r_0 = \sqrt[6]{2}$

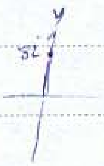
$$\theta_0 = \frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{3} = \frac{5\pi + 8k\pi}{12} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \qquad k=0$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) \qquad k=1$$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12} + i\sin\frac{21\pi}{12}\right) \qquad k=2$$

مثال 21- کدام عدد مختلط یکی از ریشه های 4 عدد $8i$ نیست

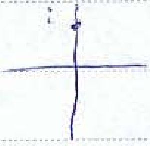


$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad r = 8$

$r_0 = 8^{1/4} \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi \quad k = (0, 1, 2, 3)$

1- $\frac{11\pi}{8}$ ✓
2- $\frac{13\pi}{8}$
3- $\frac{5\pi}{8}$
4- $\frac{9\pi}{8}$

مثال 22- کدام عدد مختلط یکی از ریشه های (مرتبه 3) i است



$\theta = \frac{\pi}{2}, r = 1$

$\theta_0 = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \qquad k=0 \Rightarrow 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

1- $\frac{1}{2}(-i+\sqrt{2})$
2- $\frac{1}{2}(-i+\sqrt{3})$
3- $\frac{1}{2}(i+\sqrt{2})$
4- $\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})$ ✓

اگر ریشه قید نشود منظور 2 است

23 : یکی از ریشه‌های چهارم $9i-$ کدام است

$r=9 \quad \theta=-\frac{\pi}{2}$

$r=\sqrt{3} \quad \theta=\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}k\pi \quad 0,1,2,3$

1- $\frac{5\pi}{8}$

2- $\frac{9\pi}{8}$

3- $\frac{11\pi}{8}$ ✓

4- $\frac{13\pi}{8}$

24 : یکی از مکعبهای $Z=\frac{1+i}{1+i+(1-i)^2}$ به کدام صورت است

$Z=\frac{1+i}{1+i-2i}=\frac{1+i}{1-i}$ $r=1 \Leftarrow$ چون مزدوج هستند $\quad \cos\frac{\pi}{3}+i\sin$

1 $\frac{\pi}{3}$

2 $\frac{\pi}{6}$ ✓

3 $\frac{\pi}{4}$

4 $\frac{2\pi}{3}$

$Z=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{2i}{2}=i \quad \theta=\frac{\pi}{2}$

$\theta_0=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$

Year. Month. Date. ( )

حد و پیوستگی :

$$\lim = \frac{0}{\text{عدد}} = 0$$

$$\lim = \frac{\text{عدد}}{0} = \pm\infty$$

$\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ صور مبهم

$$\lim_{x \to a^+} \Rightarrow x > a$$

$$\lim_{x \to a^-} \Rightarrow x < a$$

در پیوستگی مقدار تابع باید با حد برابر باشد (حد چپ و راست هم باید با هم برابر باشند)

مثال 25 : حد در $x = -2$

$$f_{(x)} = \begin{cases} 3+x^2 & x < -2 \\ 0 & x = -2 \\ 11 - x^2 & x > -2 \end{cases}$$

حد تابع برابر 7 است ولی تابع پیوسته نیست

$$\lim_{x \to -2^-} (3 + x^2) = 7 \qquad \lim_{x \to -2^+} (11 - x^2) = 7 \neq 0 = f(-2)$$

مثال 26 : مقادیر a و b را تعیین کنید بطوریکه تابع در نقاط 3 و 3- حد داشته باشد

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x - a & x < -3 \\ ax + 2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x & x > 3 \end{cases}$$

در 3- $\quad -6 - a = -3a + 2b \qquad 3a + 2b = b - 15 \qquad a = -3$

$b = -6$

مثال 27:

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x|}{[x]} = \lim_{x\to -1^+} \frac{|x|}{-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-x}{-1} = \lim_{x\to -1^+} x = -1$$

$x \to -1 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -1 < x < 0$

قبل از نزدیک شدن به ۱- جزء صحیح برابر ۱- می شود

مثال 28:

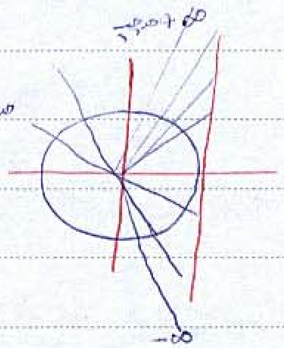
$$f(x) = \frac{1}{2^{\tan x}+1} \qquad x \to \frac{\pi}{2}$$

۱- ۱= راست ۰= حد چپ

۲- ۰ = " " حد دو راست

۳- ۱ = " " " "

۴- ۰= حد راست ۱ = حد چپ



حد راست $= \frac{1}{2^{-\infty}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$ حد چپ (کمتر از $\frac{\pi}{2}$) $= \frac{1}{2^{+\infty}+1} = \frac{1}{\infty} = 0$

مثال 29:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$$

1 $\frac{3}{3}$

2 $\frac{1}{3}$

3 1

4 حد ندارد ✓

$x \to 0^+ \quad y = 2^{1/x} \Rightarrow y \to +\infty \quad \lim_{y\to 0} \frac{1+y}{3+y} = \cancel{\tfrac{1}{3}}\ 1$

$x \to 0^- \to y \to 0 \quad \lim_{y\to 0} \frac{1+y}{3+y} = \frac{1}{3}$

کسر هر درجه وقتی درجه به سمت بینهایت برود می شود درجه بزرگ صورت به درجه بزرگ مخرج

Year. Month. Date. ( )

مثال 30 - به ازای چه مقدار a تابع پیوسته است

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \Rightarrow a = 4$$

مثال 31 - کدام عبارت صحیح است

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ \ln x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

حد چپ = 0 حد راست = 0

1 - در x=1 معین است ×
2 - در x=1 پیوسته است
3 - در x=1 پیوسته نیست ✓
4 - حد چپ و راست مساوی نیستند در x=1

مثال 32 - به ازای کدام مقادیر x تابع f(x) ناپیوسته است

$$f(x) = [x-1] + [-x] = [x] + [-x] - 1$$

1 تمام مقادیر x بجز صفر
2 فقط در صفر
3 فقط تمام مقادیر صحیح و مثبت x
4 تمام مقادیر ~~...~~ صحیح x ✓

$$k \in \mathbb{Z} \quad f(k) = -1$$

$$\left.\begin{array}{ll} k-1 < x < k & [x] = k-1 \\ -k < -x < -k+1 & [-x] = -k \end{array}\right\} k-1-k-1 = -2 \neq -1$$

حد چپ

در k پیوسته نیست

اگر دو تابع پیوسته باشند مجموع آنها پیوسته است

" " " یکی پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد مجموع آنها ناپیوسته است

" " ناپیوسته باشند مجموع آنها ممکن است پیوسته باشد و ممکن است نباشد

PAPCO

ct:

Year. Month. Date. ( )

$k < x < k+1 \qquad [x] = k$

$k + (-k) - 1 = -1 = -2$

$-k-1 < -x < -k \qquad [-x] = -k-1$

در اعداد صحیح جدا دارد

مثال 33: تابع با ضابطه $f(x)$ در نقطه $x=0$ کدام نوع پیوستگی را دارد

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

1 فقط از راست پیوسته است
2 ✓ " " چپ " " "
3 هم از چپ و هم از راست پیوسته است
4 نه ~ ~ ~ ~

راست $x \to 0^+ \qquad \dfrac{x-x}{x} = 0 \neq f(0) = 2$ پیوستگی راست ندارد

$x \to 0^- \qquad \dfrac{x+x}{x} = 2 = f(0) = 2$ " چپ دارد

مثال 34: در کدام بازه پیوسته است:

$f(x) = \sqrt{4-x^2} + \ln(x-1)$

$-2 \leq x \leq 2 \ \cap \ x > 1 \ = 1 < x \leq 2$

1 $\cancel{(-2, 2]}$
2 $\cancel{[0, 2]}$
3 ✓ $(1, 2]$
4 $\cancel{[1, 2]}$

× برای تعیین پیوستگی اول باید دامنه تابع را پیدا کرد

Year. Month. Date. ( )

مثال 35: به ازای چه مقدار a تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است

$$f(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

$2x=0 \quad -1\leq \cos\frac{1}{x} \leq 1 \neq \infty \Rightarrow$ حد $=0$

$\Rightarrow a=0$

1) -1
2) 0
3) $\frac{1}{2}$
4) 1

حد حاصلضرب = حاصلضرب حدها

$f_1(x)$	$f_2(x)$	
0	b	$=0$
a	b	$=$ عدد $a \cdot b$
∞	∞	$=\infty$
0	∞	$=$ مبهم

مثال 36: در مورد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ کدام گزینه صحیح است

$$\frac{x}{\sin x}\times x\times \sin\frac{1}{x} = 0$$

$\frac{x}{\sin x}\to 1,\quad x\to 0,\quad -1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1\neq\infty$

1) حد موجود و برابر صفر است ✓
2) 〃 〃 〃 یک 〃
3) 〃 〃 〃 $\frac{1}{2}$ 〃
4) 〃 〃 نیست

مثال 37: $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

1) 0
2) موجود نیست
3) 1 ✓
4) ∞

$$x-1<[x]\leq x \Rightarrow \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x} \quad \times x$$

حد راست: $1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1 \quad \Leftarrow x>0 = 1$

حد چپ: $1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geq 1 \quad \Leftarrow x<0 = 1$

$\gg = 1$ ساندویچ

P4PCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 38:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\[2mm] 1 & x=0\end{cases}$$

1 بجز در $x=0$ در بقیه نقاط پیوسته است ✓
2 در تمام نقاط پیوسته است ✓
3 فقط در $(0,+\infty)$ پیوسته است
4 فقط در $(-\infty,0)$ پیوسته است

مثال 39: حد چپ در نقطه $x=-1$

$$f(x)=\begin{cases}[x]+|x| & x<-1\\ [x]-|x| & x\geq -1\end{cases}$$

$-2+1=-1$

مثال 40: اگر $a_n=\operatorname{Arccot}\frac{1}{n}$ ⇐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ کدام است.

1. 0
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{2}$ ✓
4. π

مثال 41 اگر $a_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+n)^2}$ حد a_n در $n\to\infty$ چقدر است

1. 1
2. $\frac{1}{e}$
3. $\frac{1}{\sqrt{e}}$
4. صفر

$1\leq i\leq n \qquad n^2<(n+i)^2\leq 4n^2$

$\frac{1}{4n^2}\leq\frac{1}{(n+i)^2}<\frac{1}{n^2}$ n بار جمع شوند

$\frac{1}{4n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i)^2}<\frac{1}{n} \qquad n\to\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

$0 \quad < \qquad < \quad 0$

$\mu = 0.1$ $\qquad \mu = \frac{0.1}{1} = 10$ $\qquad$ 11

$\mu = 10$ $\qquad \mu = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{1}} = 10$???

Year. Month. Date. ( )

مثال 42: اگر a و b مقادیر ثابت و داشته باشیم $1 < b < a$ آنگاه $f(n)$ کدام است

$$\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} =$$

1) a
2) $\frac{b}{a}$
3) $2ae$
4) $\frac{a}{b}e$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a^n \left(1 + \left(\cancel{\frac{b}{a}}\right)^n\right)\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a = a$$

$a > b \qquad \frac{b}{a} < 1 \qquad \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad |r| < 1$

مثال 43: مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(n)$ کدام است

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 1 \Rightarrow f = 1$$

1) $R - \{-1, 1\}$
2) $R - \{1\}$
3) $\{1, -1\}$
4) R ✓

جلسه دوم:

مثال 44: تابع f با ضابطه روبرو از نظر پیوستگی کدام است

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & 0 \le x \le 1 \\ 2x - 2 & x > 1 \end{cases}$$

در هر نقطه بجز $x=1$ پیوسته است

پیوسته است ✓

در هر نقطه بجز 0 پیوسته است

〃 〃 〃 0 و 1 〃 〃

ject:
Year. Month. Date. ( )

مثال 45. تابع مقابل مفروض است کدام گزینه در مورد پیوستگی f در نقاط صفر و یک و ۱- صحیح است

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{|x|-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

1 در هر سه نقطه پیوسته است
2 〃 〃 〃 ناپیوسته 〃
3 در یک و ۱- ناپیوسته و در صفر پیوسته ✓
4 در یک و صفر 〃 〃 ۱- 〃

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-1}{-x-1}=1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$x=0 \Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow$ در صفر پیوسته است

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1}=1 \qquad f(x)=0 \Rightarrow$ در یک پیوسته نیست

در نقطه ۱- تابع تعریف نشده است

مثال 46- مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ کدام است

$$f=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \Rightarrow R$$

مثال 47- اگر تابعی بر R با ضابطه $f(x)$ موجود باشد
این تابع از نظر پیوستگی در نقاط $x=1$ و $x=2$ چگونه است؟ x گویا

$$f(x)=\begin{cases}5x\\ x^2+6 & x \text{ گنگ}\end{cases}$$

1 در هر دو نقطه پیوسته است
2 〃 〃 〃 ناپیوسته 〃
3 در $x=1$ پیوسته و در $x=2$ ناپیوسته
4 〃 〃 ناپیوسته 〃 پیوسته ✓

$5x=x^2+6 \qquad x=2, 3$

$x^2-5x+6=0$ فقط در این دو نقطه پیوسته است

مثال 48.

تابع زوج است اگر دامنه اش متقارن باشد و $f(-x)=f(x)$

〃 فرد 〃 〃 〃 〃 〃 و $f(-x)=-f(x)$

P4PCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 48: اگر f در معادله تابعی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق کند آنگاه f

1 زوج است

2 فرد است ✓

3 نه زوج نه فرد

4 متناوب است

$x=y=0 \quad f(0)=f(0)+f(0) \quad 2f(0)=f(0) \Rightarrow f(0)=0$

$y=-x \quad f(0)=0=f(x)+f(-x) \quad f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ فرد

مثال 49: مشتق هر تابع زوج تابعی فرد، و مشتق هر تابع فرد تابعی زوج است

f زوج $\Rightarrow f(-x)=f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} -f'(-x)=f'(x) \Rightarrow$ فرد

f فرد $\Rightarrow f(-x)=-f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} \cancel{-}f'(-x)=\cancel{-}f'(x) \Rightarrow$ زوج

مثال 50:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & x<-2 \\ x+1 & -2<x<+1 \\ x & x\geq 1 \end{cases}$$

$fof(-1)+(f(-1))^2=? \qquad fof(x)=f(f(x))$

$1 + 0 = 1$

مثال 51:

$f(x)=\ln\frac{2x+1}{x} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3)$

$y=\ln\frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x}=e^y \Rightarrow 2x-xe^y=-1 \Rightarrow x=\frac{-1}{2-e^y}$

$y=\frac{1}{e^x-2} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3)=\frac{1}{e\,3-2}=\underline{1}$

P4PCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 52: اگر $f: [0,1] \to R$

پیوسته و یک به یک باشد و $f(0) < f(1)$ آنگاه به ازای هر x در فاصله $(0,1]$

1 $f(x) > f(1)$ — یک به یک ⇐ یا صعودی یا نزولی و چون $f(0)<f(1)$ ⇐ تابع صعودی می‌شود

2 $f(x) < f(1)$ — چون تساوی ندارد غلط است

3 $f(x) < f(0)$ — در تابع صعودی اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

4 $f(x) > f(0)$ ✓ — $0 < x < 1$

مثال 53:

$$\lim_{x \to 0} \frac{[x+\frac{1}{2}]}{x} = ?$$

۱- -1

۲- 0 ✓

۳- 1

۴- ∞

صورت = ۰ ثابت است (برای $x=0$) و قبل از اینکه مخرج به صفر نزدیک شود صورت صفر است

مثال 54:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in Q \quad \text{گویا} \\ x-2 & x \in Q^c \quad \text{گنگ} \end{cases}$$

در -2 پیوسته است ✓

در 2 پیوسته است

در $\frac{1}{2}$ پیوسته است

در همه نقاط پیوسته است

مشتق :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

تابع در یک نقطه مشتق پذیر است اگر مشتق چپ و راست f'_+ مشتق راست f'_- مشتق چپ
باهم مساوی باشند

اگر تابعی پیوسته نباشد مشتق پذیر نیست ولی اگر مشتق پذیر باشد و مشتق داشته باشد پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2-3 & x<1 \\ x^3-2x & x>1 \end{cases}$$

در $x=1$ تعریف نشده پس حد ندارد $\Rightarrow$ مشتق ندارد

ناپیوسته است

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2-3 & x<1 \\ x^3-2x+2 & x\geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 8x & x<1 \\ 3x^2-2 & x>1 \end{cases}$$

تساوی مشتق نشد

$$f'_-(1) = 8 \neq f'_+(1) = 1$$

توابع جزء صحیح و قدر مطلق چند ضابطه ای هستند.

$f(x) = (4-x)[x]$ مشتق پذیری در $x=4$ بررسی شود

$$f(x) = \begin{cases} 3(4-x) & 3.5<x<4 \ \text{(۴ کوچکتر از)} \\ 4(4-x) & 4.5>x\geq 4 \ \text{(۴ بزرگتر از)} \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -3 \\ \nexists \\ -4 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر نیست

اگر x و y هر کدام تابعی از t باشند =

$$x = h(t) \quad y = g(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

اگر y تابع x و x تابع t باشد

$$y = f(x) \text{ و } x = h(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

اگر $y = f(x)$ باشد(تابع بطور صریح بیان شده)

اگر y تابعی از x باشد ولی نه بطور صریح $F(x,y)=0$ می گویند تابع به صورت ضمنی بیان شده

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

- تابع صعودی است اگر مشتق مثبت باشد.
- 〃 نزولی 〃 〃 〃 منفی 〃 .

نقطه بحرانی نقطه است که مشتق در آن صفر باشد یا موجود نباشد .

هر نقطه اکسترمم الزاماً بحرانی است ولی هر نقطه بحرانی الزاماً اکسترمم نیست .

نقطه بحرانی اولاً متعلق به دامنه تابع ثانیاً مشتق در آن صفر باشد یا موجود نباشد .

اگر جواب مشتق اول مشتق دوم را مثبت کرد می‌نیمم و اگر منفی شد ماکزیمم و اگر صفر شد چیزی مشخص نمی شود و باید جدول تعیین علامت را تشکیل داد .

Year. Month. Date. ( )

در توابع صریح مشتق تابع به ازای x نقطه تماس = ضریب زاویه نقطه

〃 〃 ضمنی 〃 〃 〃 〃 (x_0, y_0) 〃 〃 〃 〃 〃 〃

مثال 1:

$$y = \frac{x^4}{4} - \cancel{\frac{4x^3}{3} + 5x - 1} \qquad \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

$$f(x) = a x^n + a_0 x^{n-1} + \dots + a_n$$

مشتق مرتبه n ام تابع بالا = $a\,n!$

مثال 2:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \text{? = مشتق مرتبه } n \text{ ام}$$

به جای n مقدار یک می‌گذاریم

1) $\cancel{n(1-x)^n}$

2) $\cancel{n(1-x)^{-n}}$

3) $\cancel{\frac{n!}{(1-x)^n}}$

4) $n!(1-x)^{-n-1}$ ✓

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

مثال 3:

$$y = t^2 ,\; x = t^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ? = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

مثال 4: این تابع در R مشتق پذیر است
مقدار b کدام است

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < -1 \\ x^2 + a & x \geq -1 \end{cases}$$

حد چپ $\quad -a + b = 1 + a \quad$ حد راست $\qquad b = 1 + 2a \Rightarrow \underline{b = -3}$

مشتق چپ $\quad a = -2 \quad$ مشتق راست $\qquad \underline{a = -2}$

$$f'(x) = \begin{cases} a & x < -1 \\ 2x & x \geq -1 \end{cases}$$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 5: مشتق $f(x)$ در صفر کدام است

$f(x)=x|x|$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ -2x & x<0 \end{cases}$$

چون چپ و راست برابر است در مساوی را می‌گذاریم

صفر — دو تابع پیوسته تابع پیوسته است

مثال 6: مختصات نقطه P بر $y=\sqrt{3x-4}$ را چنان بیابید که خط مماس بر آن در نقطه P از مبدأ بگذرد

$y=mx \qquad y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-4}}$

فرض شود نقطه برابر است با $P(x_0, \sqrt{3x_0-4})$ و $m=\dfrac{3}{2\sqrt{3x_0-4}}$

$y=\dfrac{3}{2\sqrt{3x_0-4}}\times x \Rightarrow \sqrt{3x_0-4}=\dfrac{3}{2\sqrt{3x_0-4}}\times x_0$

$3x_0-4=\dfrac{3}{2}x_0 \Rightarrow x_0=$ معلوم $\Rightarrow y_0=\sqrt{3x_0-4}$

مثال 7: تابع $f(x)$ مفروض است

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0}=0$$

1- f همه جا پیوسته ولی در صفر مشتق پذیر نیست

2- " " مشتق پذیر است ✓

3- f در صفر پیوسته نیست

4- " " " مشتق پذیر بوده و $f'(0)=1$ پیوسته است

Year. Month. Date. ( )

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} = 0$ تابع در صفر مشتق پذیر هست ولی مقدارش صفر است

مثال 8:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f'(0) = ? = 1$$

پیوسته است

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - 0}{x} = 1$$

مثال 9:

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و تابع g در $x = 2$ مشتق پذیر باشد

$(g \circ f)'(0) = ?$ $\qquad g \circ f(x) = g(f(x))$

$(g(f(x)))' = f'(x) \cdot g'(f(x)) = 0$

$0 \times | g'(2) |$ موجود

$\frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$

مثال 10:

if $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \sqrt{3} \Rightarrow$ مشتق عبارت $f(1 + 2\sin x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است.

$f' \Rightarrow 2\cos x \, f'(1 + 2\sin x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} f'(2)$

$2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = 3$

Year. Month. Date. ( )

مثال ۱۱: ضریب $h''(x)$ در مشتق دوم $f(g(h(x)))$ کدام است

مشتق اول $(g(h(x)))' \times f'(g(h(x))) = h'(x)\, g'(h(x))\, f'(g(h(x)))$

جواب سؤال چون این قسمت در مشتق دوم ضریب h'' می‌شود

مثال 12:

ضریب زاویه خط مماس بر نمودار زیر در $t=2$ کدام است

$$\begin{cases} x = t^2-1 \\ y = \sqrt{t^2+1} \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{2t} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$t=2$

مثال 13: اگر $f'(0) = 2$ ، $g(1)=0$ و $g'(1)=6$ باشد $(fog)'(1) = ?$

$(fog)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = 6 \times 2 = 12$

مثال 14: اگر $(fog)'(1) = -12$ و $g(1)=0$ ، $f'(0)=-2$ $\Leftarrow$ $g'(1) = ?$

$g'(1) = 6$

مثال 15:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sqrt{e^{-x}}$$

مشتق $f(\ln x)$ در $x=4$ کدام است

$$f(\ln x)' = \frac{1}{x} f'(\ln x)\Big|_{x=4} = \frac{1}{4} \times \sqrt{e^{-\ln 4}} = \frac{1}{8}$$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 16: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = \sqrt{x} \Rightarrow$ مشتق $f(\frac{1}{x})$ به ازای $x=1$ را بیابید. -1 (گزینه)

$-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) = -1 \times f'(1) = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+(f(x-h)+f(x))}{h} = 2f'(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

مثال 17: اگر $f(a)=0$ و $f'(a)=4$ باشد

$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{5h} = \frac{2}{5} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{2h} = \frac{2}{5} f'(a) = \frac{8}{5}$

با هوپیتال $\lim \frac{2f'(a+2h)}{5} = \frac{2f'(a)}{5} = \frac{8}{5}$

مثال 18: مشتق y در $x=2$ برابر است با

$y = Arc\,tg\,x^2$ $\quad (Arc\,tg\,u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$x=2$

$y' = \frac{2x}{1+x^4} = \frac{4}{17}$

مثال 19:

$y = tgh^{-1}(Ln\,x)$ $\quad (Arc\,tgh^{-1}(u))' = \frac{u'}{1-u^2}$

$y' = \frac{1}{x} \Big/ 1 - Ln^2 x = 1$

مثال 20: $y = \cos(x+y) \Rightarrow \cos(x+y) - y = 0$

$y' = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} =$

Year. Month. Date. ( )

مثال 21 : $e^y + x^2 + y^2 = 0$

$$y' = \frac{-2x}{e^y + 2y}$$

مثال 22 : در $(1,1)$ $y^2 + x^2 - 2x^2y^2 = 0$

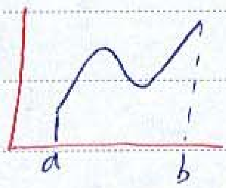
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$$

$$y' = -\frac{2x - 4xy^2}{2y - 4x^2y}$$

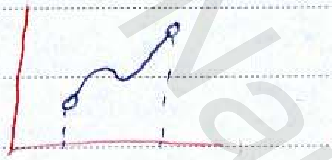
مثال 23 : man تابع روبرو در بازه زیر کدام است

در بازه $[-2, \frac{3}{2}]$ $y = |x^2 - 1|$

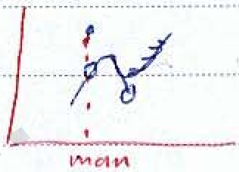
قضیه اکسترمم: اگر تابعی در یک فاصله بسته پیوسته باشد حتماً دارای یک کمترین مقدار و یک بیشترین مقدار است ولی عکس آن صادق نیست.



مطلق min , man دارد



مطلق min, man ندارد



اگر تابعی پیوسته باشد min و man را یا روی بحرانی ها می گیرد و یا در دو انتها.

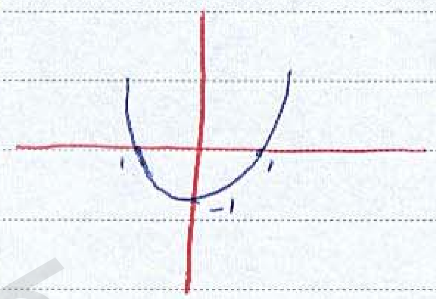
c_1 c_2 c_3

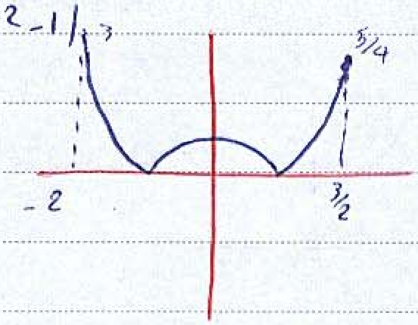
$f(c_1)$ $f(c_2)$ $f(c_3)$

$f(a)$ $f(b)$

اگر $f(a)$ بیشترین شد به شرطی قابل قبول است که تابع در a تعریف شده باشد یا در آن نقطه بازه دامنه بسته باشد.

Year. Month. Date. ( )





در $x=3$ مقدار max مطلق است .

مثال 24 نقاط $\frac{\pi}{4}$ $2k\pi$ برای تابع $f(x)$ چه جور نقاطی هستند؟

$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x$

1 مینیمم نسبی

2 نقطه عطف

3 ~~ساده~~

4 ماکزیمم نسبی ✓

$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x=0 \qquad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

$x=2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$f''(x)=\sin x \qquad f''(2k\pi-\frac{\pi}{4})=\sin(2k\pi-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$

$\Rightarrow$ max

صفر شدن f'' دلیل بر عطف بودن نقطه نیست و فقط برای درجه 3 عطف است

مثال 25 : مینیمم مطلق $f(x)$ کدام است

ch x $\cosh(x)$

$f(x)=\mathrm{ch}\,x=\cosh x$

$\cosh(x)$ یک تابع زوج است

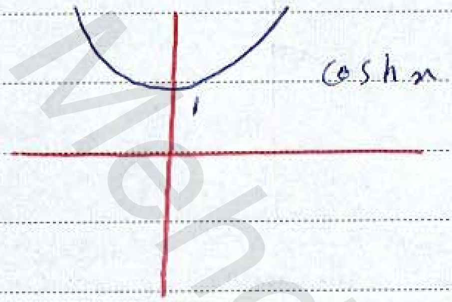
$y=\cosh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=0$

$\Rightarrow e^{x}=e^{-x} \Rightarrow x=0$

$\sinh(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

بحرانی

$y''_{(0)} = 1 > 0 \Rightarrow x=0$ min



مثال 26 :

if $g(x) = [x]\sin x \Rightarrow g'(\frac{\pi}{2})$

$\frac{\pi}{2} = 1.7 \quad [\frac{\pi}{2}] = 1 \Rightarrow g'(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

یا $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{[x]\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1} = 0$

مثال 27 : طول وتر یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع x و y برابر $\sqrt{5}$ است
بیشترین مقدار $x+y$ کدام است.

$x^2 + y^2 = 5 \qquad y = \pm\sqrt{5-x^2}$

غ ق ق چون y طول است منفی نمی شود

$x+y \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{5-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0$

$\neq 0$

چون وتر $\sqrt{5}$ است ⇐ اضلاع باید از $\sqrt{5}$ کوچکتر باشند وتر ضلع ⇐ مخرج صفر نمی شود.

$\sqrt{5-x^2} = x \qquad 5 - x^2 = x^2 \qquad 2x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ضلع >0

$\sqrt{10}$ ⇐ جواب

مثال 28: اگر $f(a)=0$ و $f'(a)=8$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)}{2h} = ?$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{2} = \frac{f'(a)}{2} = 4$$

مثال 29: گاز به درون یک بادکنک کره‌ای شکل به نسبت $5\,\frac{m^3}{min}$ دمیده می‌شود وقتی شعاع کره 3 است شعاع با چه نسبتی در دقیقه زیاد می‌شود.

$$V_{(t)} = \frac{4}{3}\pi r^3_{(t)} \qquad \frac{dV}{d(t)} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\times\pi\times 9 \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow 5 = 4\times\pi\times 9\times\frac{dr}{dt}$$

$$dr/dt = \frac{5}{36\pi}$$

مثال 30: یک نقطه در امتداد منحنی تابع به معادله $y=\sqrt{x}$ به نوعی حرکت می‌کند که مؤلفه x آن در هر دقیقه 3 واحد افزایش می‌یابد وقتی $x=1$ مؤلفه y آن با چه نسبتی در دقیقه تغییر می‌کند

تغییر افزایش

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\times 3 = \frac{3}{2}$$

مثال 31: حجم یک مکعب به نسبت $7\,\frac{cm^3}{min}$ اضافه می‌شود سطح کل مکعب وقتی طول ضلع آن 12cm است با چه نسبتی زیاد می‌شود.

$$S = 6x^2 \qquad \frac{ds}{dt} = 12x\frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{7}{3}$$

$$V = x^3 \qquad \frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt} \qquad 7 = 3\times 12^2\,\frac{dx}{dt}$$

Year. Month. Date. ( )

$+xf(x)-xf(x)$

مثال 32: اگر $f'(2)$ موجود باشد آنگاه $I=\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ کدام است

جواب: $-2f'(2)+f(2)$

هوپیتال $I=\lim_{x\to 2}\frac{f(2)-2f'(x)}{1}=f(2)-2f'(2)$

مثال 33: اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد معادله $x^n+nx+1=0$

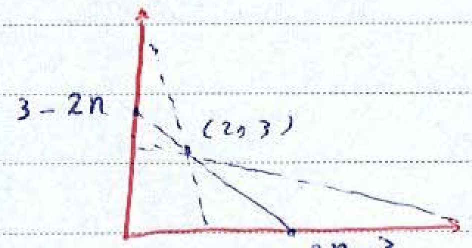
1- دقیقاً یک ریشه دارد ✓ — صعودی $\Leftarrow f'>0 \Leftarrow$ زوج $n-1 \Leftarrow$ فرد n — $nx^{n-1}+n$

2- حداکثر سه ریشه — چون n فرد بوده از منفی به مثبت می رود

3- ریشه مکرر دارد — $-\infty \to +\infty$ n فرد

4- n ریشه دارد

مثال 34: هر خط گذرنده از نقطه (2,3) با محورهای مختصات در ناحیه اول یک مثلث تشکیل می دهد کمترین مساحت این مثلثها چند واحد است.



$\frac{2n-3}{n}$

$y=nx+m \Rightarrow 3=2n+m \Rightarrow \cancel{m=\frac{3-n}{2}}$

$m=3-2n$

محورها را قطع کند $(\alpha,0) \Rightarrow x=-\frac{m}{n}$ $\qquad (0,y)\Rightarrow y=3-2n$

$\cancel{S(n)=\frac{1}{2}m\left(-\frac{2n}{3-n}\right)} \Rightarrow \cancel{S'(n)=0} \qquad \cancel{n=\frac{3}{2}}$

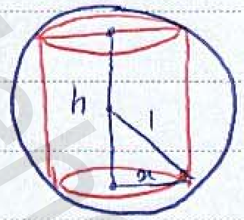
$S(n)=\frac{1}{2}(3-2n)\left(\frac{2n-3}{n}\right)$ $\qquad S'(n)=0 \Rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow S(\frac{3}{2})=0$

$n=\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \qquad S(-\frac{3}{2})=12$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 35: ارتفاع استوانه‌ای با حجم ماکزیمم که درون یک کره به شعاع واحد قرار می‌گیرد کدام است



$$V = \pi x^2 h$$

$$1 = x^2 + \frac{h^2}{4} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow V = \pi\left(1 - \frac{h^2}{4}\right) h$$

$$V' = \pi\left(1 - \frac{3}{4}h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال 36: اگر طول یک مستطیل $15m$ و در حال افزایش با نرخ $3\frac{m}{s}$ بوده و عرض آن $6m$ و در حال کاهش با نرخ $2\frac{m}{s}$ باشد، در این صورت نرخ تغییر مساحت این مستطیل ... و در حال ... است

$S(t) = x(t)\, y(t)$

$$\frac{dS}{dt} = y(t)\frac{d(x)}{dt} + x(t)\frac{d(y)}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 15 \times (-2) + 6 \times 3 = -12$$

1) 12 – کاهش
2) 48 – 〃
3) 12 – افزایش
4) 48 – 〃

مثال 37: مجموع دو عدد صحیح و مثبت برابر 9 است. حاصلضرب این دو عدد وقتی حاصلضرب یکی در مربع دیگر ماکزیمم باشد کدام است؟

$x + y = 9 \qquad x = 9 - y$

$xy^2 = (9-y)y^2 = A(y) \qquad A'(y) = 18y - 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 6$

$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow xy = 18$

PAPCO

مثال 38 : اگر شعاع داخلی یک کره فلزی 4 و شعاع خارجی آن $4\frac{1}{16}$ حجم تقریبی جداره کره چقدر است

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi 4^2 \left(\frac{1}{16}\right)$$

مثال 39 : استوانه‌ای با شعاع r و ارتفاع h را در نظر می‌گیریم حجم این استوانه $1m^3$ می‌باشد ارتفاع استوانه را چنان تعیین کنید که سطح کل آن مینیمم باشد.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$V = \pi r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\pi h}$$

$$S_{(h)} = 2\pi h \times \frac{1}{\sqrt{\pi h}} + 2\pi \times \frac{1}{\pi h} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{h} + \frac{2}{h}$$

$$S'_{(h)} = \frac{\cancel{2}\sqrt{\pi}}{\cancel{2}\sqrt{h}} - \frac{2}{h^2} = 0 \Rightarrow h^2\sqrt{\pi} - 2\sqrt{h} = 0$$

$$\Rightarrow h = 1.08$$

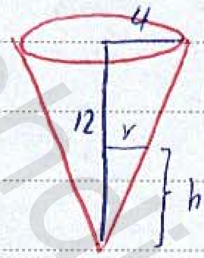
مثال 40 : نقطه‌ای بر $y = x^2 + 1$ بیابید که به نقطه (3,1) نزدیک‌ترین نقطه باشد.

$$\text{نقطه } (x, x^2+1) \Rightarrow d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2\cancel{+1}\cancel{-1})^2}$$

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

$$d' = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad (1,2)$$

مثال ۴۱: آب با سرعت $\frac{\pi}{4}$ واحد مکعب در ثانیه وارد مخزن مخروطی شکل به بلندی ۱۲ واحد و شعاع قاعده ۴ واحدی شود سرعت افزایش ارتفاع آب وقتی ارتفاع آب ۶ واحد باشد چقدر است.



$$\frac{r}{h} = \frac{4}{12} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{1}{9}\cancel{\pi} \cdot \overset{4}{36} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16}$$

جلسه سوم:

مثال 42: کدام یک از مقادیر زیر تقریب مناسب‌تری برای $\sqrt{5}$ هستند.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x \Rightarrow f(x_0+\Delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x_0 = 4 \ , \ \Delta x = 1$$

$$\sqrt{5} \simeq 2 + \frac{1}{4} \times 1 = 2.25$$

Year. Month. Date. ( )

مثال 43: تقعر نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ در کدام بازه به سمت بالاست

1. $(-\infty,\infty)$
2. $(2,3)$ ✓
3. $(1,2)$
4. $(0,1)$

$$f'(x)=\frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)(3-x^2)}{(1+x^2)^4}=0$$

$(1+x^2)^4>0$

مثبت

$-2x\,(1+x^2)\,(3-x^2)$ $\qquad x=0 \qquad x=\sqrt{3} \qquad x=-\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

مثال 44: تابع $f(x)=xe^x-1$ مفروض است.

1- f در فاصله $[0,1]$ دارای ریشه نیست
2- " " " حداقل دارای دو ریشه است
3- " " " فقط یک ریشه دارد
4 هیچکدام

x پیوسته و e^x پیوسته ← ضرب پیوسته و ۱ پیوسته ← جمع دو پیوسته، پیوسته است

$f(0)=-1<0$
$f(1)=e-1>0$ $\Rightarrow$ حتماً یک ریشه را دارد

$f'(x)=e^x(1+x)>0 \Leftarrow 0<x<1$ در بازه صعودی ← حتما دقیقاً یک ریشه دارد

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

مشتق تابع u^v

$$y=u^v \Rightarrow \ln y = v\ln u \Rightarrow \frac{y'}{y} = v'\ln u + \frac{u'}{u}\cdot v$$

مثال 45: مشتق تابع $y=x^{\sin x}$

$$\ln y = \sin x \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x}\left[\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right]$$

مثال 46: $x^y = y^x \Leftarrow y' = ?$

$$\ln x^y = \ln y^x \qquad y\ln x = x\ln y \qquad y\ln x - x\ln y = 0$$

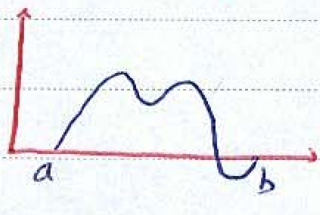
$$y' = -\frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

مشتق نسبت به y

قضایای رول ← میانگین یا لاگرانژ – کوشی

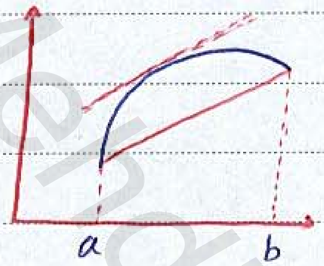
تفسیر رول   کاملاً یک طرفه

$c\in(a,b)$ s.t. $f'(c)=0$ وجود دارد $\Leftarrow$
- f بر بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد
- " " بازه (a,b) مشتق پذیر باشد
- $f(a)=f(b)=0$



مثال

قضیه میانگین:



f بر $[a,b]$ پیوسته باشد

f بر (a,b) مشتق پذیر باشد

لااقل یک c وجود دارد در (a,b) به طوریکه

$$c \in (a,b) \quad s.t. \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

قضیه کوشی:

اگر $f(x)$ و $g(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و در (a,b) مشتق پذیر و فرض شود $g'(x) \neq 0$ در $[a,b]$

آنگاه لااقل یک c متعلق به بازه وجود دارد به طوریکه

$$c \in (a,b) \quad s.t. \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

مثال 47: در کدام فاصله واقع است $\frac{tg^{-1}x}{x}$ $\Leftarrow$ $0<x<1$ $\quad f(x) = tg^{-1}(x)$

1) $(0,1)$ 2) $(0,\frac{1}{2})$ 3) $(\frac{1}{2},1)$ 4) $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

شرایط قضیه میانگین برای $f(x)$ برقرار است $[0,x]$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

گوییم $\frac{1}{1+c^2} = \frac{tg^{-1}(x) - \cancel{tg^{-1}(0)}}{x - \cancel{0}} = \frac{tg^{-1}(x)}{x}$

$$0<c<1 \Rightarrow 0<c^2<1 \Rightarrow 1<1+c^2<2 \qquad \frac{1}{2}<\frac{1}{1+c^2}<1$$

Year. Month. Date. ( )

مثال 48 معادله زیر دارای چند ریشه حقیقی است

$x^5 + 3x + k = 0$

1- دقیقاً یک ریشه

2- حداقل " "

3- ریشه ندارد

4- دو ریشه

پیوسته و مشتق پذیر است

چون توان فرد است هواره صعودی است زیرا از $-\infty$ به $+\infty$ می رود

راه دوم $f(a) = f(b) = 0$ فرض شود (فرضی، حتمی)

c موجود باشد که $\Rightarrow 5c^4 + 3 = 0 \Rightarrow \times$ غ $\Rightarrow$ ریشه دومی در کار نیست

مثال 49: تابع f در فاصله بسته $[0, 2]$ دوبار مشتق پذیر است

$f(0) = f(2) = 0$ و $x \in [0, 2] \Rightarrow f''(x) \neq 0 \Rightarrow$

درباره $(0, 2)$ کدام بیان درست است

f' 1 ریشه ندارد f' 2 دو ریشه متمایز دارد f' 3 حداقل یک ریشه دارد f' 4 ریشه ندارد

تابع f در شرایط قضیه رول صدق می کند

c وجود دارد که $\Rightarrow f'(c) = 0$

فرض کنیم تابع f در فاصله $(0, 2)$ یک ریشه مانند α داشته باشد

$\Rightarrow f(\alpha) = 0$

$[0, \alpha] \Rightarrow$ شرایط رول برقرار است

$[\alpha, 2] \Rightarrow$ " " " "

PAPCO

$c_1 \in (0, a)$ بطوریکه $\Rightarrow f'(c_1) = 0$

$0 \quad c \quad c_1 \quad 2$

$\Rightarrow c_2 \in (c, c_1)$ بطوریکه $\Rightarrow f''(c_2) = 0$ $\times$ تناقض دارد

مثال 50: فرض کنید f تابعی باشد که بر R مشتق‌پذیر است و $f(2)=-3$ علاوه اگر $2<x<5$ آنگاه $1<f'(x)<2$ در این صورت $f(5)$ به کدام بازه تعلق دارد

1- $(0, 3)$

2- $[0, 3)$

3- $[0, 3]$

4- $(0, 3]$

شرایط قضیه میانگین در فاصله $(2, 5)$ برقرار است

$$f'(c) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} \Rightarrow 1 < \frac{f(5)+3}{3} < 2$$

$$0 < f(5) < 3$$

انتگرال گیری:

تغییر متغیر

مثال 1:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad u = 1-x^2 \qquad du = -2x\,dx$$

$$x^2 = 1-u$$

$$\Rightarrow \int \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,d \qquad -\frac{1}{2}\int (1-u)\,u^{-\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{2}\int \left(u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}\right) + C \Rightarrow$$

روش جزء به جزء

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

برای توابع حاصلضرب که درهم ضرب می‌شوند $x\sin x$ و $e^x\cos x$ و ...

معمولاً چیزی را u می‌گیریم که مشتق آن از خودش سبک‌تر شود x و ...

مواردی که Arc وارد انتگرال شود آن را u می‌گیریم که مشتق آن جبری می‌شود

مثال 2:

$$\int_0^1 x e^{2x}\,dx = \qquad u = x \Rightarrow du = dx$$

$$e^{2x}\,dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1$$

مثال 3:

$$\int \sin^{-1}x\,dx \qquad u = \sin^{-1}x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$= x\sin^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad 1-x^2 = u$$

مثال 4:

$$\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1}\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 2T\operatorname{tg}^{-1}T\,dT \qquad T^2 = x \Rightarrow 2T\,dT = dx$$

Year. Month. Date. ( )

$2T\,dT = dv \to v = T^2$

$u = tg^{-1}T \to du = \frac{dT}{1+T^2}$

$= T^2\, tg^{-1}T\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{T^2+1-1}{1+T^2}\,dT = \frac{\pi}{4} - (T + tg^{-1}T)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4}$

$= \frac{\pi}{2} - 1$

مثال 5:

اگر ln زیر انتگرال بود معمولاً بهتر است u گرفته شود

$\int_e^{e^2} x\ln x\,dx \qquad u = \ln x \to du = \frac{dx}{x}$

$x\,dx = dv \to v = \frac{1}{2}x^2$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}\,dx$

مثال 6:

$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}\,dx = \int \ln u\,du = u\ln u - u \qquad \ln x = u$

$= \ln x\,\ln(\ln(x)) - \ln(x)$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$\int \ln(x)\,dx = x\ln x - x$

مثال 7:

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx \qquad dv = \frac{dx}{(1+x)^2} \rightarrow v = -\frac{1}{1+x}$$

$$u = xe^x \rightarrow du = e^x(x+1)\,dx$$

$$= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}\,dx$$

مثال 8:

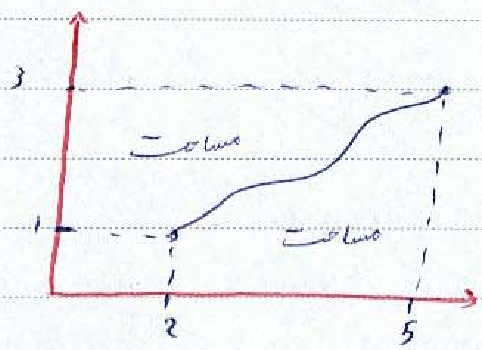
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos x)\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 0$$

ln تابع فرد و cos تابع زوج است و حاصلضرب آنها فرد است و انتگرال از a تا $-a$ تابع فرد صفر می‌شود

$$\int_{-a}^{a} f(x) = \begin{cases} \text{if فرد } f(x) = 0 \\ \text{if زوج } f(x) = 2\int_0^a f(x) \end{cases}$$

مثال 9: اگر f بر بازه $[2,5]$ پیوسته و اکیداً صعودی و $f(2)=1$, $f(5)=3$ حاصل انتگرال زیر کدام است

$$\int_2^5 f(x)\,dx + \int_1^3 f^{-1}(x)\,dx = 5\times 3 - 2\times 1 = 13$$



Year. Month. Date. ( )

مثال ۱۰: مقدار متوسط $y=\sin^2\omega t$ در فاصله $\frac{2\pi}{\omega}$ چقدر است؟

$$\left(A.V. = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\right) = \frac{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \omega \sin^2\omega t}{2\pi}$$

$$\int \sin^n x\,dx \Longrightarrow n \text{ فرد } \int \sin x\,(1-\cos^2 x)^{\frac{n}{2}}\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx \qquad n \text{ زوج } \int \dots = \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\omega}{2\pi} \times \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\,dt$$

مثال ۱۱:

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 3 \Longrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = ?$$

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2}\,dx$$

$$-\int_2^1 f(u)\,du = \int_1^2 f(u)\,du = 3$$

مثال ۱۲:

$$\int x^{4x}(\ln x + 1)\,dx = \int y^3\,dy \qquad \ln x+1 \qquad du = \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$x^{4x} \quad dx = dv \qquad v =$$

$$y = x^x \quad \cancel{\phi} \quad \ln y = x\ln x \qquad \frac{y'}{y} = (\ln x + 1)$$

$$dy = x^x(\ln x + 1)\,dx$$

Year. Month. Date. ( )

مثال 13:

$$\text{if } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$u = \left(\frac{\sin u}{x}\right)^2 \longrightarrow du = 2\left(\frac{\sin u}{x}\right)\left(\frac{x\cos x - \sin u}{x^2}\right)dx$$

$$dv = dx \longrightarrow v = x$$

$$\int = x\left(\cancel{\frac{\sin u}{x}}\right)^2\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{2\sin 2x}{x}\,dx + 2\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

$\frac{\sin^2 x}{x}$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{2\sin T}{T}\,dT = \frac{\pi}{2} \qquad 2x = T,\ dT = 2dx$$

توابع معکوس مثلثاتی:

$$\text{مشتق } D_x\left(\sin^{-1} u\right) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \longrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \Rightarrow 1 = y'\cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D_x\left(\cos^{-1} u\right) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Year. Month. Date. ( )

$$D_x\left(tg^{-1}u\right) = \frac{u'}{1+u^2} \rightarrow \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\, tg^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$D_x\left(cotg^{-1}u\right) = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad |x| \geq 1$$

$$\csc^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad |x| > 1$$

$$D_x\left(\sec^{-1}u\right) = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \rightarrow \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + c$$

$$D_x\left(\csc^{-1}u\right) = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

: 14 مثال

$$\sin^{-1}\frac{x}{2}$$

: 15 مثال

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

: 16 مثال

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

$$u^2 = e^x - 1 \rightarrow 2u\,du = e^x\,dx$$

$$\hookrightarrow e^x = u^2 + 1$$

Year. Month. Date. ( )

$$= \int_0^1 u \times \frac{2u}{1+u^2}\,du = 2\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,du = 2\left(u - tg^{-1}u\right)\Big|_0^1$$

مثال 17:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx \qquad u = \sin^2 x \rightarrow du = \sin 2x\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = tg^{-1}u\Big|_0^1$$

مثال 18:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^2\theta}{2+tg^2\theta}\,d\theta = \int_0^1 \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,tg^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,tg^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$a = \sqrt{2}$

$$u = tg\,\theta \qquad du = (1+tg^2\theta)\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$$ مثال 19

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}$$

چون در ربع اول sin و cos مثبت هستند
⇐

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

مثال 20:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x\Big|_1^{\infty} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2}$$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

مثال 21:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$f(x) = 2\int_0^x \frac{1}{e^t + e^{-t}}\,dt = 2\int_0^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt = \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

$$e^t = u$$

$$\int f(x) \neq \frac{1}{x}\int x f(x)$$

مثال 22:

$$\lim_{n \to \infty} \operatorname{Arc\,cotg} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}$$

مثال 23:

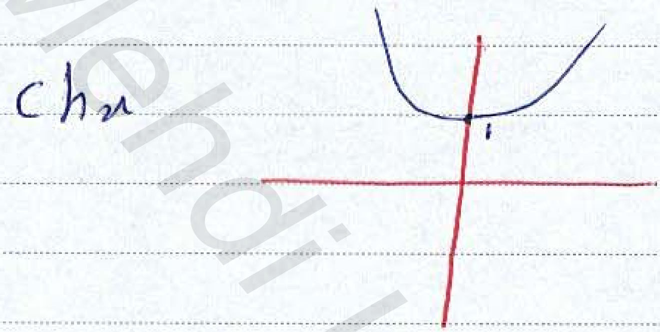
$$f(x) = \sinh^{-1}(\operatorname{tg} x) \Rightarrow f'(0) = ?$$

$$\left(f(x) = \sinh^{-1}(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \right)$$ نکته

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} = 1$$

مثال 24: کدام مورد درباره تابع $y = \operatorname{ch} x$ نادرست است

1) زوج 2) محدب 3) دارای نقطه عطف 4) دارای مینیمم

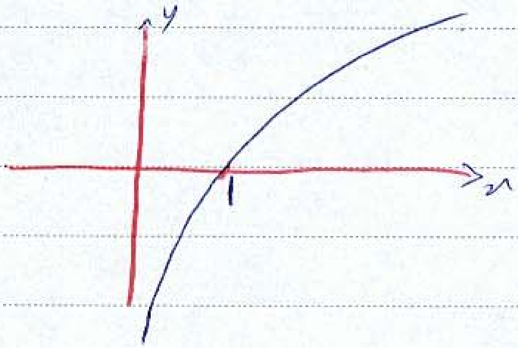


مثال 25: مشتق تابع در $x=1$ کدام است

$$(\operatorname{sh}^2 2x)' = 2\operatorname{sh}2x \operatorname{ch}2x = 2\operatorname{sh}4x = e^4 - e^{-4}$$

تابع لگاریتمی و نمایی:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad , \quad x>0$$ تعریف تابع لگاریتمی



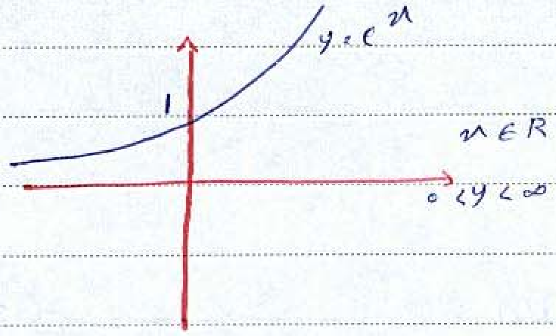
$(0,\infty)$

R

صعودی

$$D_x(\ln u) = \frac{u'}{u} \longrightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

«$y = e^{x} \iff x = \ln y$»



«$a^{x} = e^{x \ln a}$» «$\ln a^{x} = x \ln a$»

«$y = e^{u} \Rightarrow y' = u' e^{u}$»

«$\int e^{u} du = e^{u} + C$»

«$D_x(a^{u}) = u' a^{u} \ln a$» «$\int a^{u} du = \frac{1}{\ln a} a^{u} + C$»

$y = 2^{\cos x} \Rightarrow y' = -\sin x \, 2^{\cos x} \ln 2$

$\int 2^{4x+1} dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{\ln 2} \times 2^{4x+1} + C$

«$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$»

«$D_x(\log_a u) = \frac{u'}{u \ln a}$»

مثال 26:

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)+C$$

مثال 27: نمودارهای $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ و ثابت $y=c$ را در یک صفحه در نظر می‌گیریم کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

1- اگر c کوچکتر یا مساوی صفر آنگاه یک نقطه تلاقی دارد.

2- " $0<c<\frac{1}{e}$ " " دو " " " .

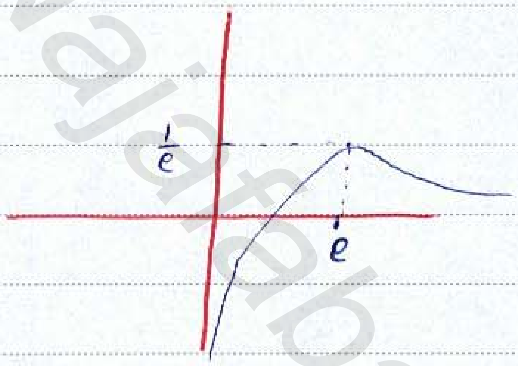
3- " $c>\frac{1}{e}$ " " هیچ " " " .

4- " $0<c<\frac{1}{e}$ " " یک " " " .

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow x=e$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim \frac{1}{x}\cdot \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$



مثال 30:

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx \qquad u=1+\ln x \qquad du=\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\int \frac{u-1}{u}\,du = u-\ln u + C$$

مثال 31:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-2} = \int_1^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^3 \frac{dx}{x-2} = -\infty - \infty = -\infty$$

مثال 32: حاصل $\dfrac{x^{\log_a y}}{y^{\log_a x}}$ کدام است

$\log_a y = A \qquad y = a^A$

$\log_a x = B \qquad x = a^B$

$$\Rightarrow \frac{(a^B)^A}{(a^A)^B} = 1$$

مثال 33:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \ln(\sin x)\cot x\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} u\, du$$

$u = \ln(\sin x) \qquad du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \cot x\, dx$

مثال 34: عمران 91: به ازای چه مقادیر a انتگرال همگرا است

1) $|a|<1$, $a \neq 1$ 2) $a>1$ 3) $a<1$ ✓ 4) a هر مقدار, $a \neq 1$

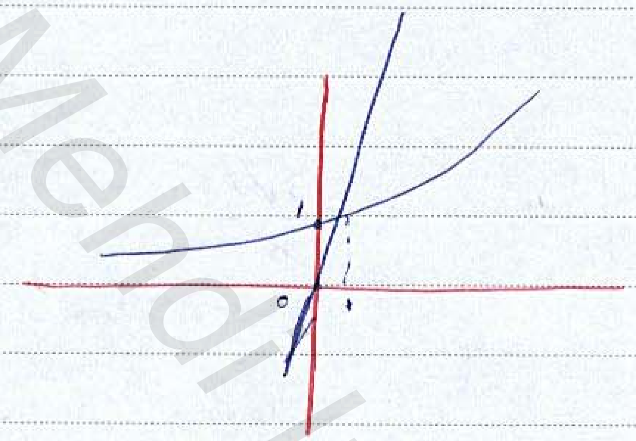
$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^a} \qquad \ln x = u$$

$$\Rightarrow = \int_0^{\ln 2} u^{-a}\, du = \frac{1}{1-a} u^{1-a} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{1-a}(\ln 2)^{1-a} -$$

اگر $1-a$ منفی شود u به مخرج می‌آید و نمی‌توان به u صفر را ⇐ $1-a>0 \Rightarrow a<1$

Year. Month. Date. ( )

مثال 35: $2^x = 3x$ در کدام بازه جواب دارد.



1) $(-\infty , 0)$

2) $(-1 , 0)$

3) $(1 , 2)$

4) $(0 , 1)$ ✓

مثال 36:

$$f(x) = \ln \frac{2x+1}{x} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3)$$

$$y = \ln \frac{2x+1}{x} \Rightarrow \frac{2x+1}{x} = e^y \qquad 2x + 1 - xe^y = 0$$

$$x(2 - e^y) = -1 \qquad x = \frac{1}{e^y - 2} \Rightarrow f^{-1}(\ln 3) = 1$$

مثال 37:

$$y = (x^2+1)^{e^x} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_1 = ?$$

$$\ln y = e^x \ln(x^2+1) \qquad \frac{y'}{y} = e^x \ln(x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1} e^x$$

$$y'_{(1)} = 2^e (e \ln 2 + e)$$

مثال 38:

$$x = t^2 - 1 \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$$

$$y = \frac{1}{t}$$

$$d^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{-1}{t^2}}{2t} = \frac{-1}{2t^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{3}{2t^4}}{2t} = \frac{3}{4t^5}$$

مثال 39:

$x = tg\, t$

$y = \sin t$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

مثال 40:

$f(x) = \ln x$

$f \circ g(x) = x \ln x \Rightarrow g'(2) = ?$

$g'(x)\, f'(g(x)) = \ln x + 1$

$\Rightarrow f(g(x)) = \ln x^x \qquad g(x) = x^x \Rightarrow \ln g(x) = x \ln x$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow g'(2) = 4(1 + \ln 2)$$

مثال 41: ماکزیمم تابع زیر کدام است

$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x = x^{-x}$

$\ln y = x \ln \frac{1}{x} \qquad \ln f(x) = -x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\ln x - 1$

$f'(x) = -x^{-x}(1 + \ln x) \qquad \ln x = -1 \qquad x = e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

$x \neq 0$ می‌شود چون در دامنه تابع نیست

$f\left(\frac{1}{e}\right) = (e)^{1/e}$

مثال 42: انتگرال معین ⇐ مشتق صفر می‌شود

$$y = e^{1+\tan x} + \int_0^2 \ln(2+\sin x)\,dx$$

$y'(0)$ $\quad \ln y = 1+\tan x + \ln\int \quad \frac{y'}{y}$

$$y' = (1+\tan^2 x)\,e^{1+\tan x}$$

مثال 43:

$$\int_0^2 2^{x^3} x^2\,dx \qquad u = x^3 \qquad du = 3x^2\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int_0^8 2^u\,du = \frac{1}{3}\left.\frac{2^u}{\ln 2}\right|_0^8 = 122.63$$

مثال 44: مقدار متوسط تابع $f(x)=2^x$ در $[0,1]$ کدام است.

$$A.V = \frac{\int_0^1 2^x\,dx}{1-0} = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$$

مثال 45:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}\sin x^2}{x+xe^{1/x}} = \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{x}{1+e^{-1/x}}$$

$\sin x^2$ را با x^2

$0\times\infty$ مبهم

$\frac{0}{\infty}$ مبهم

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1+e^{-1/x}} = \frac{0}{1+0} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+e^{-1/x}} = 0$$

سرعت رشد تابع نمایی مخرج منفی بیشتر از صورت است ⇐ قبل از آنکه صورت صفر شود مخرج بینهایت می‌شود

$(\frac{1}{f})\times(h) = 0$

Year. Month. Date. ( )

مثال 46:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, d(x|x|) = \int_{-1}^{0} e^{-x^2}\, d(-x^2) + \int_{0}^{1} e^{-x^2}\, d(x^2)$$

الف ۰ ب 2 ج ... د ...

تابع زوج است $\Rightarrow$ $f \neq 0$

$$= e^{-x^2}\Big|_{-1}^{0} + e^{-x^2}\Big|_{0}^{1} = 1 - e^{-1} - e^{-1} + 1 = 2 - 2e^{-1}$$

مثال 47:

$$\int_{1}^{e} \frac{\ln x^2}{x}\, dx \qquad \ln x^2 = u \quad du = \frac{2x}{x^2}\, dx \quad \frac{1}{2} du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$= 2\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\, dx = 2\int_{0}^{1} u\, du = 1$$

مشتق گیری از انتگرال:

$$D_x \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)\, dt = f(V(x))\, V'(x) - f(U(x))\, U'(x)$$

1:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-\sqrt{2x}} \int_{2}^{x} \frac{t+1}{t^3-5}\, dt \qquad \frac{0}{0} \text{ هوپیتال}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{x+1}{x^3-5} \times 1 - 0}{1 - \frac{1}{\sqrt{2x}}} = \frac{4}{3}$$

2:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-\sqrt{2x}} \int_{2}^{x} \sqrt{5+x^2}\, dx = 6$$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

:3

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin(tx)}{x}\,dx$$

د: $t\sin t$ ج: $\frac{\sin tx}{x}$ ب: $\frac{2\sin t^2}{t}$ الف: $\int_0^t \cos(tx)\,dx$ ✓

$\frac{\sin t^2}{t}$

:4

$$\text{مشتق } D_x\left[\int_{3x}^{4x^2+3} \sqrt{\cos t}\,dt\right] = 8x\sqrt{\cos(4x^2+3)} - 3\sqrt{\cos 3x}$$

:5

$$D_x: \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2\,dt$$

:6

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos\beta x\,dx \Rightarrow I'(2) = ?$$

د) $2\sqrt{\pi}$ ج) 2 ب) $I(2)$ الف) $-I(2)$

از طرفین نسبت به β مشتق می‌گیریم

$$I'(\beta) = \int_0^\infty -x e^{-x^2}\sin\beta x\,dx$$ ج) معین و پیوسته است می‌توان مشتق گرفت

$$u = \sin\beta x \Rightarrow du = \beta\cos\beta x$$
$$-x e^{-x^2}dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$I'(\beta) = \frac{1}{2}\underbrace{e^{-x^2}}_{\text{صفر}}\underbrace{\sin\beta x}_{\text{عدد ثابت}}\Big|_0^\infty - \frac{\beta}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\beta x\,dx$$

$$I'(2) = -I(2)$$

۹۰

Year. Month. Date. ( )

:7

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \int_0^a x \sin x \, dx = 0$$

:8

$$G(x) = \int_x^{x^3} \cos(t^2)\, dt \Rightarrow G''(0) = ?$$

$$G'(x) = 3x^2 \cos x^6 - \cos x^2$$

:9 $$\lim_{x \to x_1} \frac{x}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} f(t)\, dt = \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)\, dt + x\,(f(x))}{1} = x_1 f(x_1)$$

:10 $\frac{\infty}{\infty}$ هوپیتال ⇐

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} \overset{\text{هوپیتال}}{=} \frac{2\cancel{e^{x^2}}\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)}{e^{\cancel{2}x^2}} \overset{\text{هوپیتال}}{=} \frac{2\cancel{e^{x^2}}}{2x\cancel{e^{x^2}}} = 0$$

:11 فرض شود تابع g در همه جا پیوسته و انتگرال $\int_0^1 g(t)\,dt = 1$ اگر

$$f(x) = \int_0^x (x-t)^2 g(t)\, dt \Rightarrow f''(1) = ?$$

الف) -1 ب) 1 ج) -2 د) 2 ✓

$$= \int_0^x (x^2 - 2tx + t^2)\, g(t)\, dt$$

$$x^2 \int_0^x g(t)\, dt - 2x \int_0^x t\, g(t)\, dt + x^2 g(x)$$

$$-2x \int_0^x t g(t)\, dt = -2 \int_0^x t . g(t)\, dt - 2x . x\, g(x)$$

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^x t^2 g(t)\,dt = x^2\, g(x)$$

$$f'(x) = 2x\int_0^x g(t)dt + x^2 g(x) - 2\int_0^x t\,g(t) - 2x\,x\,g(x) + x^2 g(x)$$

$$f''(x) = 2\int_0^x g(t)\,dt + \cancel{2x\,g(x)} - \cancel{2x\,g(x)}$$

$$f''(1) = 2$$

$$y = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}}{\cos x} = 1 \qquad : 12$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}\int_2^x \sqrt{20-t^4}\,dt = \left(\frac{\cancel{x}-2+2}{\cancel{x-2}}\right)\int_2^x \sqrt{20-t^4}\,dt \quad : 13$$

$$= \frac{2}{x-2}\int_2^x \sqrt{20-t^4}\,dt$$

$$: 14$$

$$f(x) = \int_0^{\sin x} x e^{-t^2}\,dt = x\int_0^{\sin x} x e^{-t^2}\,dt + x\cos x\, e^{-\sin^2}$$

$$f'(\pi) = ?$$

$$f'(x) = \int_0^{\sin x} e^{-t^2}\,dt + x\cos x\, e^{-\sin^2 x} = -\pi$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{du}{1+u^4} \qquad f'(1) + f(1) = ? \qquad : 15$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}$$

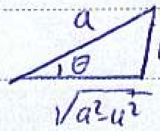
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}\int_1^{x^2} \frac{\sin\frac{\pi}{4}t}{t}\,dt = \sqrt{2}$$: ۱۶

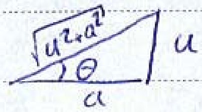
$$\lim_{x\to 1} x^2 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^2}\dots}{x-1} = \lim_{x\to 1} 2x\,\frac{\sin x^2\frac{\pi}{4}}{x^2} = \sqrt{2}$$

انتگرال گیری از توابع به فرم زیر

$\sqrt{a^2-u^2}$ $\quad u=a\sin\theta$



$\sqrt{a^2+u^2}$ $\quad u=a\,tg\,\theta$



$\sqrt{u^2-a^2}$ $\quad u=a\sec\theta$

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{-(x^2-x)}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = I$$

$$x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta \qquad dx=\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

-0.684

Year. Month. Date. ( )

$$\int_0^{3/4} 2\sqrt{1+t^2}\,dt = ? \qquad t = tg\,\theta \qquad \frac{15}{16} + \ln 2 \qquad :2$$

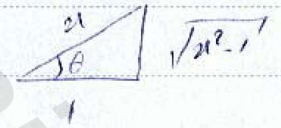
$1 + tg^2 = \sec^2$

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} = \cancel{\tfrac{1}{2}}\ \sin^{-1} \frac{x-2}{2} \Big|_1^3 = \frac{\pi}{3} \qquad :3$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\,dx = \int \frac{tg^2\theta \ \cancel{\sec\theta}}{\cancel{\sec\theta}}\,d\theta = tg\,\theta - \theta \qquad :4$$

$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$

$x = \sec\theta$



$\downarrow$

$\cos\theta = \frac{1}{x}$

حل انتگرال $\int \frac{P(x)}{q(x)}\,dx$

درجه مخرج بیشتر از صورت $\Rightarrow$ مخرج تجزیه شود

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} \equiv \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x^2+4)(x^2-2x+5)} \equiv \frac{A}{x-1} + \int \frac{Bx + C}{x^2+4} + \int \frac{Dx + E}{x^2 - 2x + 5}$$

$\ln + Arc\,tg$ $\qquad$ $\ln + \int \frac{a}{x^2 - 2x + 5}$

مربع کامل شود

$\int$ —— dx گویا از توابع مثلثاتی

$\Rightarrow\ z = tg\,\frac{x}{2}$

Year. Month. Date. ( )

$$\cos x = \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$$

$$\sin x = \frac{2Z}{1+Z^2}$$

$$dx = \frac{2dZ}{1+Z^2}$$

:5

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} = \int \frac{\frac{2dZ}{1+Z^2}}{2-\frac{1-Z^2}{1+Z^2}} = \int \frac{2}{1+3Z^2}\,dZ$$

انتگرال گیری از توابع شامل جزء صحیح و قدر مطلق

انتگرال نامعین معنی ندارد

:1 به ازای چه مقدار x تساوی زیر برقرار شود

$x \in [2,3]$

$$\int_0^x [t^2]\,dt = 2(x-1)$$

$$\int_0^1 0\,dt + \int_1^2 1\,dt + \int_2^x 4\,dt = 2(x-1)$$

$$1 + 4(x-2) = 2(x-1) \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

:2

$$\int_0^{\sqrt{3}} [x^2]\,dx = \int_0^1 0\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} 1\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\,dx$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$0 < x^2 < 1$

$1 < x^2 < 2 \qquad 1 < x < \sqrt{2}$

$2 < x^2 < 3 \qquad \sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

P4PCO

Year. Month. Date. ( )

:3

$$\int_0^3 \left(x-[x]+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_1^2 \left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_2^3 \left(x-\frac{3}{2}\right)dx$$

:4

$$\int_0^{\pi/2} [4\sin^2 x]\,dx = \int_0^{\pi/6} 0\,dx + \int_{\pi/6}^{\pi/4} 1\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} 2\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} 3\,dx$$

$0<4\sin^2x<1 \Rightarrow 0<\sin^2x<\frac{1}{4}$ $\quad 0<\sin x<\sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow 0<x<\frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{4}<\sin^2x<\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2}<\sin^2x<\frac{3}{4}$ $\quad \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{3}$

$\frac{3}{4}<\sin^2x<1$ $\quad \frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$

$$\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx = \int_1^2 \ln(1)\,dx + \int_2^3 \ln 2 + \dots + \int_n^{n+1} \ln n \quad :5$$

$\ln[\cancel{x}]$ $\quad 1<x<$ $\quad \ln n!$ $\quad \ln(n+1)!$ $\quad \ln\frac{n}{n+1}$ $\quad \ln\frac{n+1}{n}$

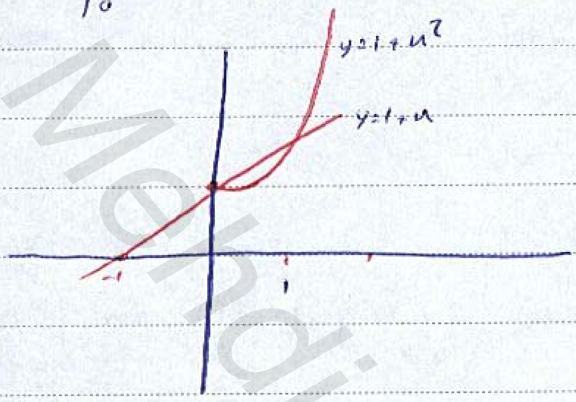
$\ln 1+\ln 2+\dots+\ln n=\ln n!$

$$\int_0^t [2\sin x]\,dx \Big|_{t\to\frac{\pi}{2}^-} = \int_0^{\pi/6} 0\,dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2} \quad :6$$

$0<2\sin x<1$ $\quad 0<\sin x<\frac{1}{2}$ $\quad 0<x<\frac{\pi}{6}$

$1<2\sin x<2$ $\quad 0<\sin x<1$ $\quad \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$

$I = \int_0^2 \max(1+x, 1+x^2)\,dx \qquad \int_0^1 1+x\,dx + \int_1^2 1+x^2\,dx$:7



$1+x^2 = 1+x$

$x^2 - x = 0 \qquad x = 1$

انتگرالهای نامتعارف یا ناسره:

$$\int_a^{+\infty} = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b$$

$$\int_{-\infty}^b = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{c} + \int_c^{+\infty} = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b$$

باید تک تک انتگرالها موجود باشد

$$x \geq a \qquad 0 \leq g(x) \leq f(x) \Rightarrow 0 \leq \underbrace{\int_a^{\infty} g(x)\,dx}_{②} \leq \underbrace{\int_a^{\infty} f(x)\,dx}_{①}$$

همگرایی ① ← همگرایی ②

واگرایی ② ← واگرایی ①

Year. Month. Date. ( )

:1

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$$ $p>1$ همگرا

$0<p\leq 1$ واگرا

اگر انتگرال روبه‌رو همگرا باشد در نتیجه انتگرال زیرش همگرا است و عکس آن صادق نیست

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx \longrightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$$

همگرا ۱ — همگرا ۲

۱ همگرا ← ۲ همگرا ⇐ ۲ همگرا مطلق

۲ همگرا ← ۱ واگرا ⇐ ۲ همگرای مشروط خودش همگرا ولی قدرمطلقش همگرا نیست

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^5}$$

$$0<\underbrace{\frac{1}{1+x^5}}_{\text{همگرا}}<\underbrace{\frac{1}{x^5}}_{\text{همگرا}}$$

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$ همگرا مطلق

قدر مطلق cos از یک کوچکتر است ولی $-1\leq\cos\leq1$ ⇐ قدر مطلق cos را می‌گذاریم

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}=?\qquad 2\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_0^1=$$ موجود نیست ⇐ :1

$$2\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1$$

P4PCO

Year. Month. Date. ( )

$$f(a)=\infty \quad = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(b)=\infty \quad = \lim_{\delta \to 0^-} \int_{a}^{b+\delta}$$

$$c \sim \infty \quad \int_a^b f(x)\,dx \qquad f(c)=\infty \quad = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_{a}^{c+\varepsilon} + \lim_{\delta \to 0^+} \int_{c+\delta}^{b}$$

:2

$$\int_0^1 \ln x \, dx = x\ln x - x \Big|_0^1 = -1$$

$0 \times \infty$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$$

:3

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}$$

:4

$$\int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-9}}\,dt = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-9}}\,dt + \int_3^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-9}} = \sqrt{5}-\sqrt{7}$$

صور مبهم:

صفر

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞

هوپیتال

$0\times\infty \Rightarrow f_1 \, f_2$ $\quad \frac{f_1}{1/f_2}$ $\frac{0}{0}$ $\quad \frac{f_2}{1/f_1}=\frac{\infty}{\infty}$

معمولاً بهتر است ln در صورت باشد

مثبت

$\infty-\infty \Rightarrow f_1-f_2 \longrightarrow f_1\left(1-\frac{f_1}{f_2}\right) \Rightarrow \infty\left(1-\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right) \xrightarrow{\text{هوپیتال}}$

توصیه می‌شود

$\infty \times$ عدد $= \infty$

مشکل $\infty \times$ صفر

0^0 , ∞^0 , 1^∞ : $f_1^{f_2} \Rightarrow y=f_1^{f_2} \Rightarrow \ln y = f_2 \ln f_1 \Rightarrow \lim \ln y = \lim f_2 \ln f_1$

چون ln پیوسته است $\ln(\lim y) = \lim f_2 \times \lim \ln f_1 = \lim f_2 \times (\ln(\lim f_1))$

$\infty^\infty \Rightarrow \qquad = \infty\times\infty = \infty$ مبهم نیست

$0^0 \Rightarrow \lim f_2 = 0 \quad \lim f_1 = 0 \Rightarrow \ln \lim y = 0\times\infty$

$\infty^0 \Rightarrow \qquad 0\times\infty$

$1^\infty \Rightarrow \qquad 0\times\infty$

بعد از رفع ابهام $\quad \ln(\lim y) = a \Rightarrow (\lim y = e^a)$

$0^\infty \Rightarrow \qquad = \infty\times(-\infty) = -\infty$ مبهم نیست

$\infty^1 \Rightarrow \qquad = 1\times(\infty) = \infty$ 〃 〃

Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x+c}\right)^{Bx+r}=e^{\alpha B}\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x+c}\right)^{Bx+r}=e^{\alpha B}$$

:1

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x-\sin x}-\frac{6}{x^2}\right)=\lim\left(\frac{x^3-6x+6\sin x}{x^2(x-\sin x)}\right)$$

:2

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=4=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{x}$$

جمع ثابت را بازی می شد

$$t=x-c\qquad x\to\infty\Rightarrow t\to\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{2c}{t}\right)^{t}\underbrace{\left(\quad\right)^{c}}_{1}=e^{2c}=4\qquad c=\ln 2$$

:3

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-1}\right)^{2x}=\lim\left(1+\frac{6}{2x-1}\right)^{2x}=e^{6}$$

B در کار نیست

Year. Month. Date. ( )

:4

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right) = 0$$

در مزدوج ضرب و تقسیم شود.

:5 a و b را طوری بیابید که رابطه زیر برقرار شود.

$$I = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{bx + \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a-t}}\, dt = -2$$

$a=-1 \quad b=-1$ ✗

$a=1 \quad b=1$

$a-t>0 \Rightarrow a>t \Rightarrow x>t>0 \quad a>0 \Rightarrow \quad a=1 \quad b=-1$ ✓

$a=-1 \quad b=1$ ✗

$$I = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a-x}}}{b+\cos x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\sqrt{a-x}\,(b+\cos x)}$$

در $x=0$ ⇐ صورت 0 ⇐ اگر مخرج صفر نشود، $I=0$ است که ⇐ $\neq -2$ می‌شود

⇐ باید مخرج صفر شود تا هوپیتال بزنیم ⇐ چون $\cos x>0$ ⇐ $b<0$ ⇐ $b=-1$

:6

$$\lim_{x \to \infty} \left(a^{1/x} - 1\right)^x$$

$y = \left(a^{1/x} - 1\right)^x \qquad \ln y = x \ln\left(a^{1/x} - 1\right)$

$\infty \times (-\infty) = -\infty$

$\lim y = e^{-\infty} = 0$

تابع گ: گاما

$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ به ازای $\alpha>0$ همگراست.

برای مقادیر $\alpha\in[1,2]$ مقدار انتگرال دارای جدول جواب‌ها می‌باشد برای مقادیر غیر کاری می‌کنیم α در بازه ذکر شده قرار بگیرد

اگر $\alpha>2$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}\underbrace{x^{\alpha}}_{u}\,dx}_{dv}=-\underbrace{x^{\alpha}e^{-x}}_{\frac{x^\alpha}{e^x}}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx=\alpha\Gamma(\alpha)$$

$\Gamma(1)=1$

$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ $\qquad$ $\Gamma(\alpha)=\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$

مثال: $\Gamma(4)=3\Gamma(2)=3\times2\times\Gamma(1)=3\times2\times1=3!$

مثال: $\Gamma(5.7)=4.7\,\Gamma(3.7)=4.7\times3.7\times2.7\times1.7\times\Gamma(1.7)=(4.7)!$

اگر $\alpha<1$

$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$$

مثال $\Gamma(-2.6)=\dfrac{\overbrace{\Gamma(1.4)}^{\text{از جدول}}}{(-2.6)(-1.6)(-0.6)(0.4)}=(-3.6)!$

فاکتوریل برای تمام اعداد متعلق به R تعریف می‌شود بجز اعداد صحیح منفی

Year. Month. Date. ( )

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$ $\Rightarrow 1 = 0!$ تعریف نشده $\Gamma(0) = (-1)!$ تعریف نشده

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ $1 = 0(-1)!$ تعریف نشده

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

:1

$\Gamma(-\frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

:2 چرا؟

$(\frac{3}{2}!) = ? = \frac{3}{2} \times (\frac{1}{2})!$

:3

$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2} \times (\frac{1}{2}!) = \frac{3}{2} \times \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

:4

$$\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx = \frac{6!}{2^7}$$

$2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{2}$

$$\int_0^\infty x^6 \cdot e^{-2x} dx = \frac{1}{2^7}\int_0^\infty e^{-t} t^6 dt$$

انتگرال هایی که بازه آنها ۰ تا ∞ است یا از لاپلاس یا Γ حل می شود

Year. Month. Date. ( )

:5

$$\int_0^1 (-\ln t)^3\, dt$$

وجود ln و بازه از $1-0$ نشان می‌دهد که می‌توان با تغییر متغیر بازه را $\infty-0$ کرد

$$-\ln t = x \Rightarrow -\int_\infty^0 x^3 e^{-x}\, dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx = 3! = 6$$

$$t = e^{-x}$$

$$dt = -e^{-x}\, dx$$

:6

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^4}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{4}}\, dt$$

$$x^4 = t$$

$$4x^3 dx = dt$$

$$x^2\, dx = \frac{1}{4} \times \frac{1}{x}\, dt \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{4}} dt$$

$$x = t^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x^{-1} = t^{-\frac{1}{4}}$$

تابع β

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}\, dx$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

مثال: $\int_0^1 x^2 (1-x)^4\, dx = \beta(3,5) = \dfrac{\Gamma(3)\Gamma(5)}{\Gamma(8)} = \dfrac{2!\,4!}{7!}$

PAPCO

فرمول

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \quad , m,n>0$$

دنباله و سری

دنباله تابعی است مانند f که از مجموعهٔ اعداد طبیعی N به مجموعه اعداد حقیقی R تعریف می‌شود

$$f(n) = \frac{2}{n+1}$$

$a_1, a_2, \dots a_n$

دنباله همگرا است اگر

$\lim_{n \to \infty} a_n$ موجود باشد

$\frac{4n}{n-1}$ همگرا به 4 $\qquad$ $\frac{4n^2}{n-1}$ واگرا

$1,1,1,1 \dots \dots 1$ همگرا به 1 $\qquad$ $(-1)^n$ واگرا

اگر $|r|<1$ باشد دنباله r^n همگرا است و حد آن صفر می‌شود ولی برای مساوی یا بزرگتر واگرا است.

a_n و b_n همگرا به a و همگرا به b

$$a_n \pm b_n \xrightarrow{\text{همگرا به}} a \pm b$$

$$a_n \times b_n \longrightarrow a \times b$$

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$

Year. Month. Date. ( )

۱- دنباله زیر همگرا یا واگرا است

$$\left\{\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{\pi}{n}\right\} = \frac{n}{n+1}\,\frac{\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \times \pi = \pi$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1}\sin\frac{\pi}{n}$$

۲- حد دنباله روبرو کدام است

$$\left\{\frac{|\sin n|}{n+2}\right\} \qquad 0 \leq \underbrace{\frac{|\sin n|}{1+2}}_{f} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} f \leq 0 \Rightarrow \lim\left\{\frac{|\sin n|}{n+2}\right\} = 0$$

سری:

* سری عبارت است از مجموع جواب‌های دنباله. $\quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \quad \Sigma a_n$
* اگر جملات دنباله تشکیل دهنده سری عدد باشند سری را عددی گوییم. $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$
* ״ ״ ״ ״ ״ ״ تابع ״ ״ تابعی ״. $\quad u_n = x^{n-1}$

در حالت کلی قادر نیستیم مقدار همگرایی سری را بدست آوریم جز در موارد خاص

Year. Month. Date. ( )

$a_1, a_2, \dots a_n$

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

دنباله $\{S_n\}$ $\quad \lim S_n = L$ موجود باشد

* اگر حد دنباله S_n موجود باشد آنگاه سری به $\lim S_n$ که برابر L است همگرا باشد.

1: حاصل سری زیر کدام است.

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} \dots \frac{1}{n(n+2)}$$

بازای n فرد => $n = 2k-1$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

$n=1 \quad \frac{1}{1\times 3} = \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{6}}$

$n=3 \quad \frac{1}{3\times 5} = \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{10}}$

$n=5 \quad \frac{1}{5\times 7} = \cancel{\frac{1}{10}} - \cancel{\frac{1}{14}}$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$ مقدار همگرایی

$\vdots$

$n=n \quad \frac{1}{n(n+2)} = \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{2(n+2)}$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+2)}$$

Year. Month. Date. ( )

:2

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots \qquad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$$

$$n=1 \qquad \frac{1}{1\times 2}=1-\cancel{\frac{1}{2}}$$

$$n=2 \qquad \frac{1}{2\times 3}=\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}$$

$\vdots$

$$n=n \qquad \frac{1}{n(n+1)}=\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}$$

$+$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=1$$

:3 مقدار زیر کدام است

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=? \Rightarrow$$

$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$n=1 \qquad \frac{2}{1\times 3}=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}$$

$$n=2 \qquad \frac{2}{3\times 5}=\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n=1$$

Year. Month. Date. ( )

سری هندسی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overset{\text{جمله اول}}{a}\, \underset{\text{قدر نسبت}}{q}^{n-1}$$

اگر $|q|<1$ سری همگرا به $\frac{a}{1-q}$

اگر $|q|\geq 1$ سری واگرا است

-۱ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ همگرا $\Rightarrow \frac{1/2}{1-1/2} = 1$

سری همساز:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{واگرا}$$

اگر یک سری همگرا باشد حد جمله عمومی آن صفر باشد

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

اگر $\lim a_n$ صفر نبود سری واگر است ولی اگر صفر بود دلیل بر همگرایی نیست.

مثال $\sum \frac{2n-1}{4n+3}$ $\lim a_n = 1 \neq 0 \Rightarrow$ واگر

نوع سری حاصل از حذف m جمله از سری با سری اولیه فرق نمی‌کند

مثال $\sum \frac{1}{n+4}$ $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$

واگر $\sum \frac{1}{n}$ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \Rightarrow \sum \frac{1}{n+4}$ واگراست

Year. Month. Date. ( )

* اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد به L $\Leftarrow$ سری $\sum b a_n$ همگرا است به bL.
* " " " واگرا " $\Leftarrow$ " " " واگرا است.

اگر سری a_n به l_1 و b_n به l_2 همگرا باشد $\Leftarrow$

$\sum (a_n \pm b_n)$ همگرا با $l_1 \pm l_2$

$\sum a_n \cdot b_n$ همگرا به $l_1 l_2$

$\sum \frac{a_n}{b_n}$ همگرا به $\frac{l_1}{l_2}$ $\Leftarrow$ $l_2 \neq 0$

اگر علامت دنباله a_n به دلخواه مثبت و منفی شود باید برای سری از $\sum |a_n|$ استفاده کرد.
" " " " " یک در میان " " می‌توان برای سری قانون گفت.

سری های مثبت: (سری‌های با جواب مثبت)

$\sum a_n$ و $\sum b_n$

if $\overset{n\geq}{\forall n} \Rightarrow a_n < b_n \Rightarrow$

اگر a_n واگرا $\Leftarrow$ b_n واگرا است

" b_n همگرا $\Leftarrow$ a_n همگرا است

مثال:

$\sum \frac{1}{4^n+5}$ $\qquad$ $4^n+5 > 4^n \Rightarrow \frac{1}{4^n+5} < \underset{\text{همگرا}}{\frac{1}{4^n}}$

$\frac{1}{4^n}$ هندسی $\frac{1}{4}$ با قدر نسبت $\Rightarrow$ همگرا

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

سری P:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p}}$$

$p>1$ همگرا

$p \leq 1$ واگرا

۱: بازای کدام مقادیر p سری همگرا است.

$$\sum n^{3p+3}$$

$p < -\frac{3}{4}$

$p < -\frac{4}{3}$ ✓

$-\frac{3}{2} < p < -\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4} < p < -\frac{4}{3}$

$$-3p-3>1 \Rightarrow p < -\frac{4}{3}$$

قضیه: سری با جملات مثبت

هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هم‌نوع هستند.

مثال: $\frac{1}{n+4}$ حد $\frac{\frac{1}{n+4}}{\frac{1}{n}} = 1$ ⇐ هر دو هم‌نوع هستند ⇐ $\frac{1}{n}$ واگرا ⇐ $\frac{1}{n+4}$ واگرا

هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ آنگاه اگر b_n همگرا، a_n همگرا است.

$$\frac{\frac{1}{n^3+4}}{\frac{1}{n^2}} = 0$$ هر دو همگرا

هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ آنگاه اگر b_n واگرا، a_n واگرا است.

PAPCO

آزمون دالامبر:

اگر $\sum a_n$ یک سری مثبت و $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ آنگاه اگر

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \text{if } L \begin{cases} <1 & \text{همگرا} \\ =1 & \text{بحث نکنید} \\ >1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

آزمون کوشی

$$\text{if } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \Rightarrow \text{if } L \begin{cases} <1 & \text{همگرا} \\ =1 & \text{بحث نکنید} \\ >1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

اگر a_n توان n داشته باشد؛ از این آزمون حل شود

قضیه

اگر سری a_n یک سری مثبت و $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ موجود باشد آنگاه اگر
مخالف صفر

$p>1$ سری همگرا

$0<p\le 1$ سری واگرا

مثال سری $\frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} n^{\overset{p=1}{1}} \times \frac{1}{n} = \overset{\text{موجود}}{1} \Rightarrow p=1 \Rightarrow$ واگرا

$\frac{n}{n^2+3}$ $\quad \lim_{n\to\infty} n \frac{n}{n^2+3} = 1 \quad , p=1 \Rightarrow$ واگرا

$\frac{1}{n^2+3}$ $\quad \lim n^2 \frac{1}{n^2+3} = 1 \quad p=2$ همگرا

Year. Month. Date. ( )

اگر تابع $f(n)$ به ازای $x \geq a$ پیوسته و مثبت و اکیداً نزولی باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ نسبت به انتگرال $\int_a^{\infty} f(x)dx$ همگرا یا واگرا باشد، همگرا یا واگرا است.

حفظ شود

مثال حفظ شود

مثال $f(n)$ ($\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ واگرا) $f(n) = \frac{1}{x \ln x}$

$$f'(n) = \frac{-\ln x - 1}{(x \ln x)^2}$$

$$\ln x + 1 = 0 \qquad \ln x = -1 \qquad x = \frac{1}{e}$$

فرض شود $x \geq e$

حتماً نباید عدد طبیعی باشد فقط باید سه شرط فوق را ارضا کند

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x)\Big|_e^{\infty} = \infty \Rightarrow \text{واگرا}$$

سری با جملات مثبت و منفی (یکی در میان) : سری متناوب.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad , \quad a_n > 0$$

آزمون لایب‌نیتز

اگر یک سری داشته باشیم :

1. شرط اول $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$

2. شرط دوم $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

آنگاه سری همگرا است.

Year. Month. Date. ( )

* اگر تعداد متناهی جملات سری را بنویسیم خطای حاصل از قدر مطلق جمله بعدی کمتر است.
اگر شرایط برقرار نشد دلیلی واگرایی نیست

1 . . . . . 10 $= \frac{1}{n}$

مثلا

$|\frac{1}{11}|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \text{همگرا} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \quad -\frac{1}{5}$$

خطای مجموع کمتر از $|\frac{-1}{5}|$ است

اگر سری به دلخواه جملات مثبت ومنفی داشته باشد:

سری حاصل از قدر مطلق جملات را بررسی می کنیم که تمام قضایای سری مثبت برای آن صادق است

اگر سری حاصل از قدر مطلق جملات همگرا شود سری را همگرای مطلق گوئیم
" " " " " " واگر " و خود سری همگرا شود آن را همگرای مشروط گوئیم

اگر نوع سری با آزمون بالا مبرقابل مشخص نباشد ممکن است آزمون زیر بتواند نوع سری را مشخص کند.

آزمون رابه:

$$\lim_{n \to \infty} n \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = L \begin{cases} L > 1 & \text{همگرای مطلق} \\ L = 1 & \text{بحث نمی کنیم} \\ L < 1 & \text{همگرای مطلق نیست} \end{cases}$$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

۱: سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ یک سری با همگرایی ..... :

۱- مطلق است غ ثابت شد ۱۱ واگراست

$a_n = \frac{1}{n \ln n}$

۲- همگرا نیست

۳- ساده است ✓

$\frac{1}{n \ln n} \overset{?}{>} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ $(n+1)\ln(n+1) \overset{?}{>} n \ln n$

۴- هیچکدام

$n+1 > n$ 2

ln تابعی صعودی $\Rightarrow \ln(n+1) > \ln(n)$ 1

$1,2 \Rightarrow (n+1)\ln(n+1) > n \ln n$

$\Rightarrow$ همگرا ساده

۲: سری $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ داده شد کدام گزینه درست است؟

۱- سری همگراست و مقدار همگرایی یک است. سری با جملات مثبت است

۲- " " " " " " دو " .

۳- " واگرا " .

آزمون کوشی $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{e}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ همگراست

۴- هیچکدام. ✓

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ قدر نسبت $\frac{1}{e}$ $\Rightarrow \frac{1/e}{1-1/e} = \frac{1}{e-1}$ مقدار همگرایی $\neq$ ۱ و ۲

۳: سری $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{3}{2^n}$:

$a_n = \frac{3}{2^n}$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

۱- سری همگراست و مقدار همگرایی $\frac{3}{2}$ است.

۲- " " " " 2 " .

$\frac{1}{2^n} \overset{?}{>} \frac{1}{2^{n+1}}$ ✓ $\Leftarrow 2^{n+1} > 2^n$

۳- " واگرا " .

۴- " همگرا " " " " " ۱ " .

$\Rightarrow$ سری همگراست

P4PCO

Year. Month. Date. ( )

$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\dots$ یا $-(+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64})$

$-(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\dots)+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$

قدر نسبت $\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ قدر نسبت

$\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$ $3\times-\frac{1}{3}=-1$

4- $\sum(-1)^n\frac{n+1}{n^2}$

1- سری واگرا است — به دلیل یک (اختلاف توان) صورت و مخرج ی شود واگرا $\frac{n+1}{n^2}$ سری قدر مطلق

2- مطلقاً همگرا است غ

3- همگرا است ولی مطلقاً همگرا نیست

4- هیچ اظهار نظری نمی توان کرد

$a_n=\frac{n+1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\frac{n+1}{n^2}\overset{?}{>}\frac{n+2}{(n+1)^2}$

$(n+1)^3>n^3+2n^2$

$\cancel{n^3}+3n^2+3n+1>\cancel{n^3}+2n^2$ ✓ => همگرا است

:5 $\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}+3^{-n})$ کدام است

$=\sum\frac{1}{2^n}+\sum\frac{1}{3^n}=\frac{3}{2}$

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

:6 $\sum \frac{n^2}{n^2+1}$

$\lim a_n = 1 \Rightarrow$ واگرا

اگر مطابق صفر نشد واگرا ولی اگر صفر شد دلیلی بر همگرایی نیست

صعودی است

نوع a مشخص نیست

همگرا است

واگرا است ✓

:7 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1-\frac{1}{n})}$

واگرا است ✓

مشابه ولی نامعین است

همگرا است

$\lim \ln(1-\frac{1}{n})^n$

به دلیل وجود log در مخرج کسر نمی‌توان اظهار نظر کرد

$\ln e^{-1} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ واگرا

:8 کدام همگرا و کدام واگرا است

I $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3-1}$ واگرا

II $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

دالامبر $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ همگرا

هردو همگرا

هردو واگرا

I همگرا II واگرا

II همگرا I واگرا ✓

بسط $e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$

Year. Month. Date. ( )

:9

$$\sum \frac{n\sqrt{n}}{1+n^2} \quad , \quad \sum \frac{n\sqrt{n}}{1+n^3}$$

$n^{\frac{3}{2}=p}$, $n^{\frac{3}{2}=p} \times a_n$

واگرا — همگرا

سری تابع:

$\sum u_n$ — U تابعی از x

* سری تابع به ازای مقادیری که انتخاب می‌کند تبدیل به سری‌های عددی می‌شود که ممکن است هم همگرا نباشد به مجموعه مقادیر x که به ازای آن مقادیر سری همگرا می‌شود را میدان همگرایی گوییم.

— سری توانی

تیلور 1 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-C)^n = C_0 + C_1(x-C) + C_2(x-C)^2 + \dots + C_n(x-C)^n + \dots$

مک‌لورن 2 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + \dots$

.1 $x - C = X \Rightarrow 1 \longrightarrow 2$

.2

$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ — <1 همگرا، $=1$ بحث نکنید، >1 واگرا

فقط برای سری توانی از اصطلاح شعاع همگرایی استفاده می‌شود.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| < 1 \text{ تا همگرا شود}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| \Rightarrow \text{(2)} \ |x| < R$$

مک‌لورن

شعاع همگرایی

$-R \quad 0 \quad R$

(1) تیلور $-R < |x-C| < R$

$\leq \quad \leq$

Year. Month. Date. ( )

شعاع همگرایی سری حاصل از مشتق گیری جمله به جمله از یک سری یا انتگرال گیری جمله به جمله از یک سری
با ـــ ـــ ـــ اولیه برابر است

۱- $\sum \frac{x^n}{n^n}, \; x>0$

$c_n = \frac{1}{n^n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \infty$$

$\infty \quad e$

واگراست

حد ندارد

✓ همگراست — در همه جا همگراست — $R=\infty$ شعاع همگرائی

نزولی و واگراست

حفظ شوند:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$R = \infty$

به جای x مقدار $2x$ می‌گذاریم $\cos 2x$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots \qquad |x|<1$$

!!

$\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ — فقط $\cos x$ زوج است $\Rightarrow$ تابع زوج

$\sin x$

$\cos x$ ✓

e^x

0

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

:2 وقتی سری زیر صحیح است که

$$\frac{1}{1+Z} = 1 - Z + Z^2 - Z^3 \ldots$$

$|Z| < \infty$

$|Z| \leq 1$

✓ $|Z| < 1$

$|Z| < n$ هر دلخواه

:3 فاصله همگرایی ها و شعاع همگرایی R را برای سری زیر بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$ توانی

$0 < x < 2 \quad R=1$

$-3 < x < -1 \quad R=2$

$1 < x < 3 \quad R=2$ ✓

$-1 < x < 3 \quad R=2$ ✓

چون R، || داریم در نظر گرفتن نمی‌شود

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}(3n+2)}{2^n(3n-1)} = 2$$

$-2 < x - 1 < 2 \qquad -1 < x < 3$

:4 شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

$$R = \lim \frac{\cancel{n!}\,(n+1)^{\cancel{n+1}}}{n^n \cancel{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

:5 کلیه نقاط همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ عبارت است از

$x > \frac{1}{2}$ ✓

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1 \qquad \left|\frac{x-1}{x}\right| < 1$$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$x > 0$

$0 < x < 1$

Year. Month. Date. ( )

$-1 < \frac{n-1}{n} < 1$ $\quad -1 < 1-\frac{1}{n} < 1$ $\quad -2 < -\frac{1}{n} < 0$

بازه همگرایی

$0 < \frac{1}{n} < 2$ $\quad n > \frac{1}{2}$ $\quad \Leftarrow \frac{1}{n} > 0$ (چون

6: شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{(n^2+1)3^n}$ کدام است

$R = \lim \frac{((n+1)^2+1)\cancel{3}^{n+1}}{(n^2+1)\cancel{3}^{n}} = 3$ شعاع 3 است $\quad$ ~~2n+1~~

برای بازه همگرایی $\quad -3 < 2n+1 < 3$

7: کدام یک از سری های زیر همگرا است

$\sum_{n=1} \sin\frac{1}{n}$ واگرا ~~همگرا~~ , $\sum_{n=1} \sin\frac{n^2+1}{n^2}$ واگرا ,

$\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ همگرا , $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ واگرا

1- $\lim_{n\to\infty} n^{p=1} \sin\frac{1}{n} = 1$ $\quad$ واگرا $\Leftarrow p=1$

$\lim \sin\frac{n^2+1}{n^2} = \sin 1 \neq 0$ $\quad$ واگرا

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ $\quad$ همگرا واگرا است فیبز

$\lim (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ $\quad$ از آزمون انتگرال همگرا است

t:
Year. Month. Date. ( )

8- بازه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ کدام است

$\lim \frac{(n+1) e^{-(n+1)x}}{n e^{-nx}} < 1$

$e^{-x} < 1 \quad -x < \ln 1 = 0 \quad x > 0$

$(0, \infty)$ ✓

$[0, \infty)$

$(-\infty, 0)$

$(-\infty, 0]$

9- حاصل $\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!}$ کدام است ✓

$\sum \frac{x^n}{n!}$ همگرا $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

0 ✓

ناموجود

بی کران

وابسته به a

10- $U_{(n)} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ و $V_n = \cos\frac{1}{n}$ آنگاه از نظر همگرایی دو سری زیر چگونه‌اند ✓

$S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$ و $T = \sum_{i=1}^{\infty} V_i$

$\lim_{n \to \infty} V_n \overset{\cos 0}{=} 1 \neq 0$ واگرا

$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad n \geq 1 \quad \lim n^{\frac{1}{n} = P} \times \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \qquad P = \frac{1}{n}, n > 1 \Rightarrow P < 1$

واگرا

Year. Month. Date. ( )

۱۱:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

واگرا

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$\ln\frac{1}{2}$ همگرا به ✓

$\ln 2$ 〃 〃

$\ln\frac{1}{4}$ 〃 〃

$$\ln\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \ln\frac{n}{n+1} + \ln\frac{n+2}{n+1}$$

$$a_1 = \ln\frac{1}{2} - \cancel{\ln\frac{2}{3}}$$

$$a_2 = \cancel{\ln\frac{2}{3}} - \cancel{\ln\frac{3}{4}}$$

$$\vdots$$

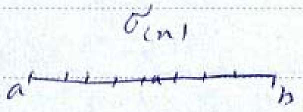
$$a_n = \cancel{\ln\frac{n}{n+1}} - \ln\frac{n+1}{n+2}$$

$+$

$$S_n = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \lim S_n = \ln\frac{1}{2}$$

ریاضی II :

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad F'(x) = f(x)$$



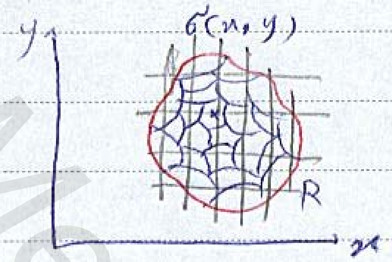
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{(x_i)}\,\Delta_i x = L$$

$\|\Delta\|$ نرم Δ بزرگترین فاصله از بین فاصله‌ها

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

انتگرالهای چند گانه همیشه بیان کننده یک عدد هستند

Year. Month. Date. ( )



$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i,y_i)\,\Delta_i A = l$$

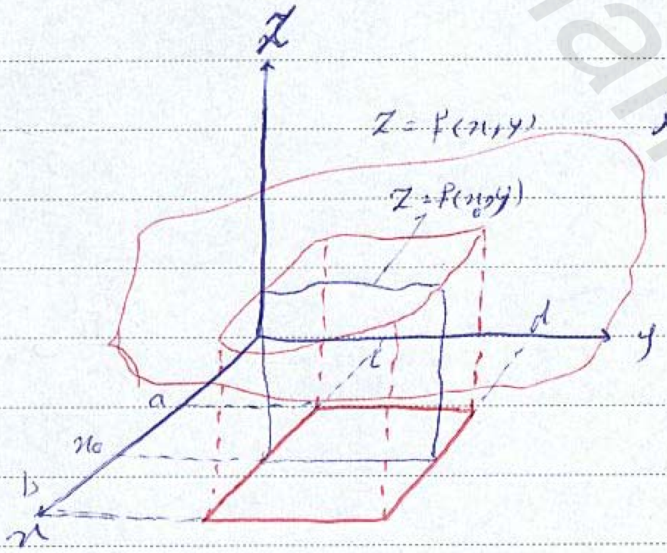
$\|\Delta\|$ طول بزرگترین قطر زیرخانه => بزرگترین فاصله بین دو نقطه از خانه

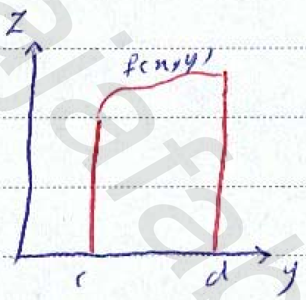
اگر حد مجموعه موجود و مستقل از پارتیشن روی صفحه باشد =>

$$\int_R\int f(x,y)\,dA$$

پارتیشن بندی منظم => $\Delta_i A = \Delta_i x \cdot \Delta_i y$ => $\int_R\int f(x,y)\,dx\,dy$

جداره ها حتماً باید قائم و به موازات محور سوم باشد

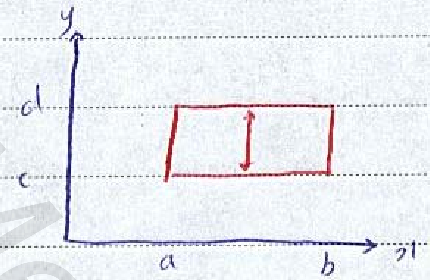




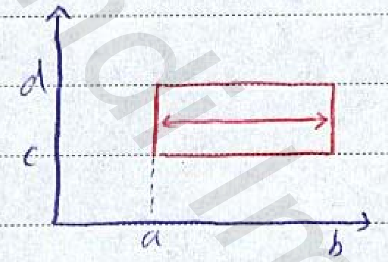
$$\int_a^b f(x_0,y)\,dx$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Month. Date. ( )

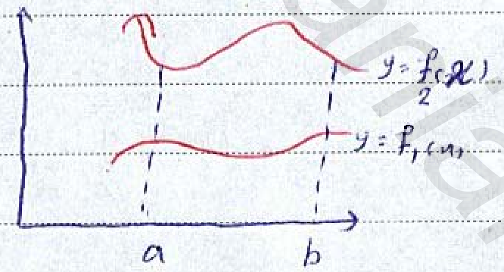


$$\int_a^b \int_c^d f \, dy \, dx$$

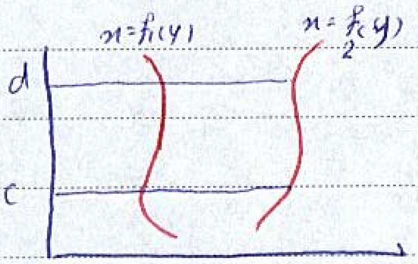


$$\int_c^d \int_a^b f \, dx \, dy$$

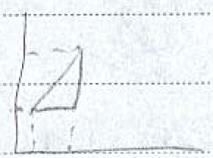
باید خط را عمود بر محور ها گرفت

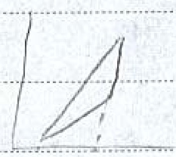


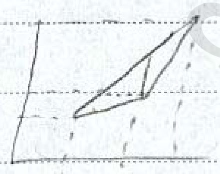
$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f \, dy \, dx$$



$$\int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f \, dx \, dy$$

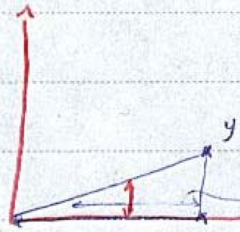






Month. Date. ( )

۱- حاصل $\iint_D e^{2y-x}\,dx\,dy$ که در آن میدان D با سه راس (۱و۲) و (۰و۲) و (۰و۰) باشد کدام است

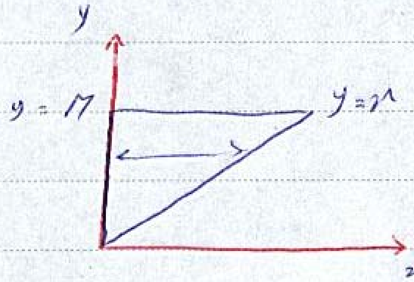


$dx\,dy$ $\iint$ زیرا ← خط آبی درست تر است

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} e^{2y-x}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{2y-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}x} = \int_0^2 \frac{1}{2}(1-e^{-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x+e^{-x})\Big|_0^2$$

۲- $\iint_D \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$ در روی مثلث محدود به نیمساز ناحیه اول و محورها و خط $y=\pi$ را حساب کنید



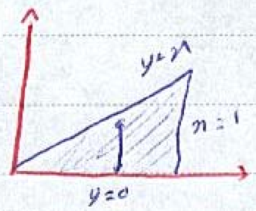
انتگرال $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ قابل محاسبه نیست

〃 〃 〃 $\int \frac{e^x}{x}\,dx$

⇐ مجبوریم اول بر محور yها حرکت کنیم

$$\int_0^{\pi}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y}\, x\Big|_0^{y}\,dy = \int_0^{\pi} \sin y\,dy = -\cos y\Big|_0^{\pi} = 1+1=2$$

۳- $\int_D\int e^{y/x}\,dA$ وقتی D ناحیه درون مثلث حاصل از خطوط به معادلهٔ $y=x$ و $y=0$ و $x=1$ باشد کدام است



انتگرال $\int e^{y/x}\,dx$ قابل محاسبه نیست ⇐ بنابر خط عمودی حرکت باشد

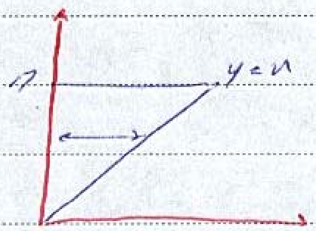
P4PCO

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^x e^{y/x}\,dy.dx = \int_0^1 x e^{y/x}\Big|_0^x dx = \int_0^1 x(e-1)\,dx$$

باید به تابع زیر انتگرال هم توجه شود و تابعی متغیر در نظر گرفته شود که انتگرال گیری آن راحت‌تر است

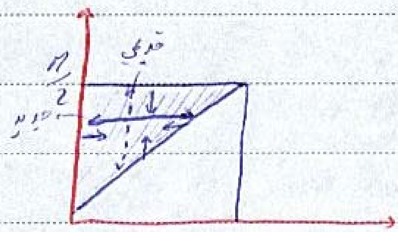
4- $\int_D\int y x^{-\frac{1}{2}}\,dxdy$ $\quad (0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$

5- $\int_E\int \cos(x+y)\,dxdy$ $\quad y=\pi,\ x=0,\ y=x$



6- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dydx$

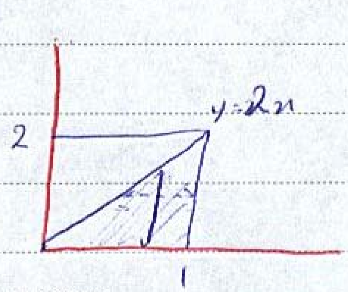
$$\cancel{\int_x^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dxdy = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\, x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx}$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dxdy$$

7- $\int_0^2\int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dxdy$

غ.ق محاسبه ⇐ ترتیب انتگرال عوض شود

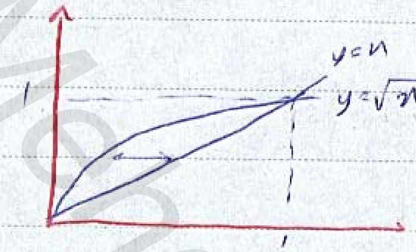


$$\int_0^1\int_0^{2x} e^{x^2}\,dydx = \int_0^1 e^{x^2}\, y\Big|_0^{2x} dx = \int_0^1 2x e^{x^2}\,dx$$

PAPCO

8 - ترتیب بازه‌ها را عوض کنید

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \varphi(x,y)\,dy$$

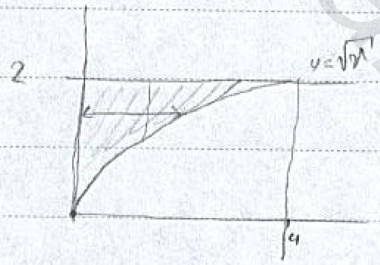


$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

9 -

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \cos(y^3)\,dy\,dx$$

تغییر ترتیب

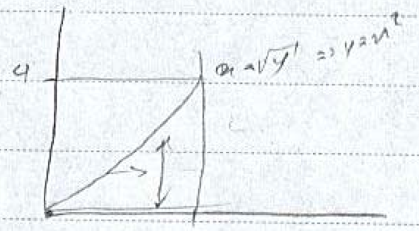


$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \cos(y^3)\,dx\,dy =$$

10 -

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3+1}\,dx\,dy$$

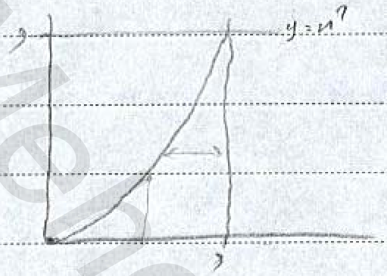
تغییر ترتیب



$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\,dy\,dx$$

۱۱ – تمرین

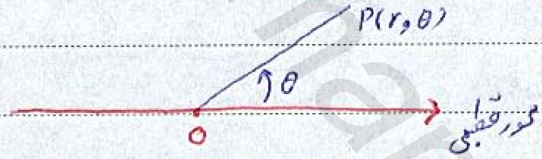
$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \cos x^3 \, dx\, dy$$

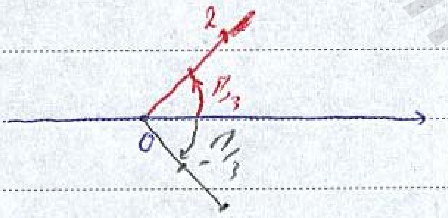


$$\int_0^3 \int_0^{x^2} \cos^3 x \, dy\, dx$$

سیستم قطبی

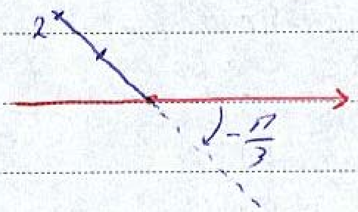
هر نقطه در سیستم قطبی به وسیله زوج $P(r,\theta)$ بیان می‌شود.



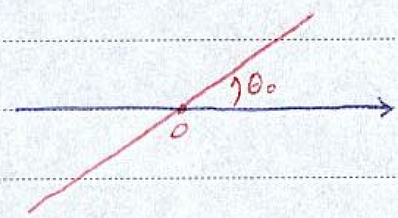


$(2, \frac{\pi}{3})$

$(2, -\frac{\pi}{3})$

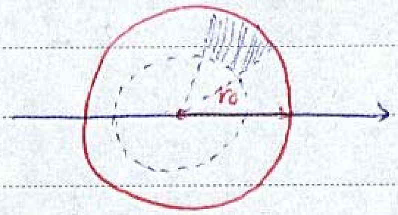


$(-2, -\frac{\pi}{3})$



$\theta = \theta_0$

$\theta = \theta_0$ را شعاع حامل گویند



$r = r_0$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r_0

$r\,dr\,d\theta$

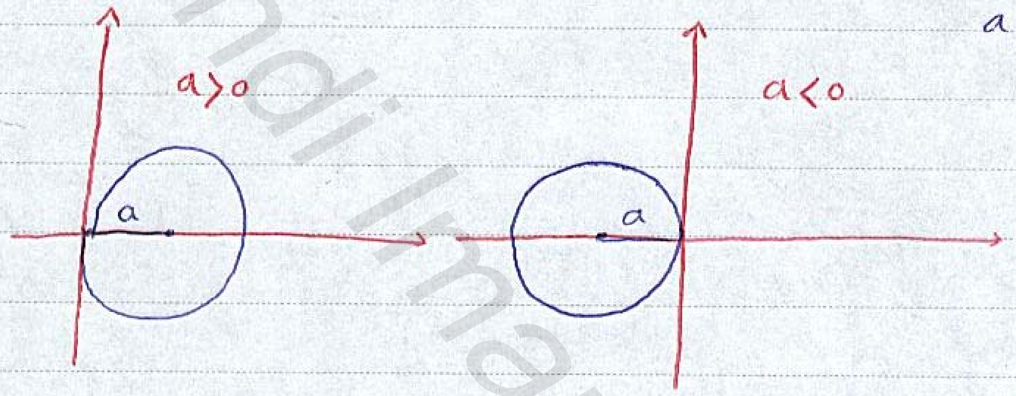
$r\times($ $r=2a\cos\theta)$ حفظ شود

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$r^2=2ax \Rightarrow x^2+y^2=2ax \Rightarrow x^2+y^2-2ax=0 \Rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$

یک دایره به مرکز (۰ و a) و شعاع a



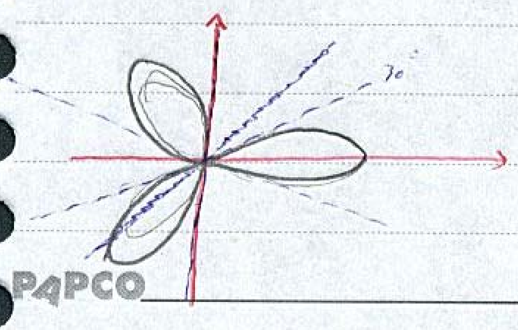
$r=2b\sin\theta$ شکل حفظ شود

$r=a\cos n\theta$ یا $r=a\sin n\theta$ گل رز

اگر n فرد باشد n پر دارد

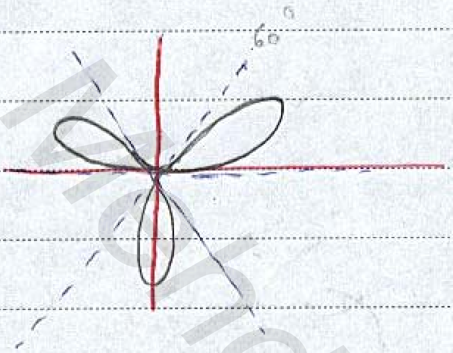
اگر n زوج باشد 2n پر دارد

$r=\cos 3\theta$ $\quad r=0 \quad \cos 3\theta=0 \quad \theta=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$



Month. Date. ( )

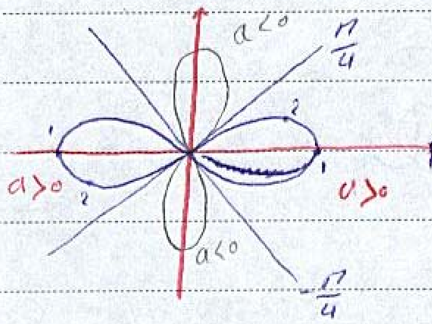
$r = \sin 3\theta$



به اندازه $\frac{\pi}{3}$ اختلاف فاز دارند

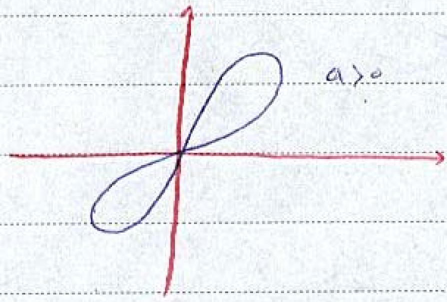
$r^2 = a\cos 2\theta$ یا $r^2 = a\sin 2\theta$ پروانه

$r^2 = a\cos 2\theta$ $r = 0$ $\cos 2\theta = 0$ $\Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$



اگر a مثبت باشد $\Rightarrow$ $\cos 2\theta$ باید مثبت باشد $\Rightarrow$ $\cos 2\theta$ در ربع اول یا چهارم
$\Rightarrow$ θ باید بین صفر و $\frac{\pi}{4}$ یا بین $-\frac{\pi}{4}$ و صفر باشد

اگر a منفی باشد $\Rightarrow$ $\cos 2\theta$ باید منفی باشد $\Rightarrow$ $\cos 2\theta$ در ربع دوم و سوم
$\Rightarrow$ θ باید بین $\frac{3\pi}{4}$ و π یا π و $\frac{5\pi}{4}$ باشد

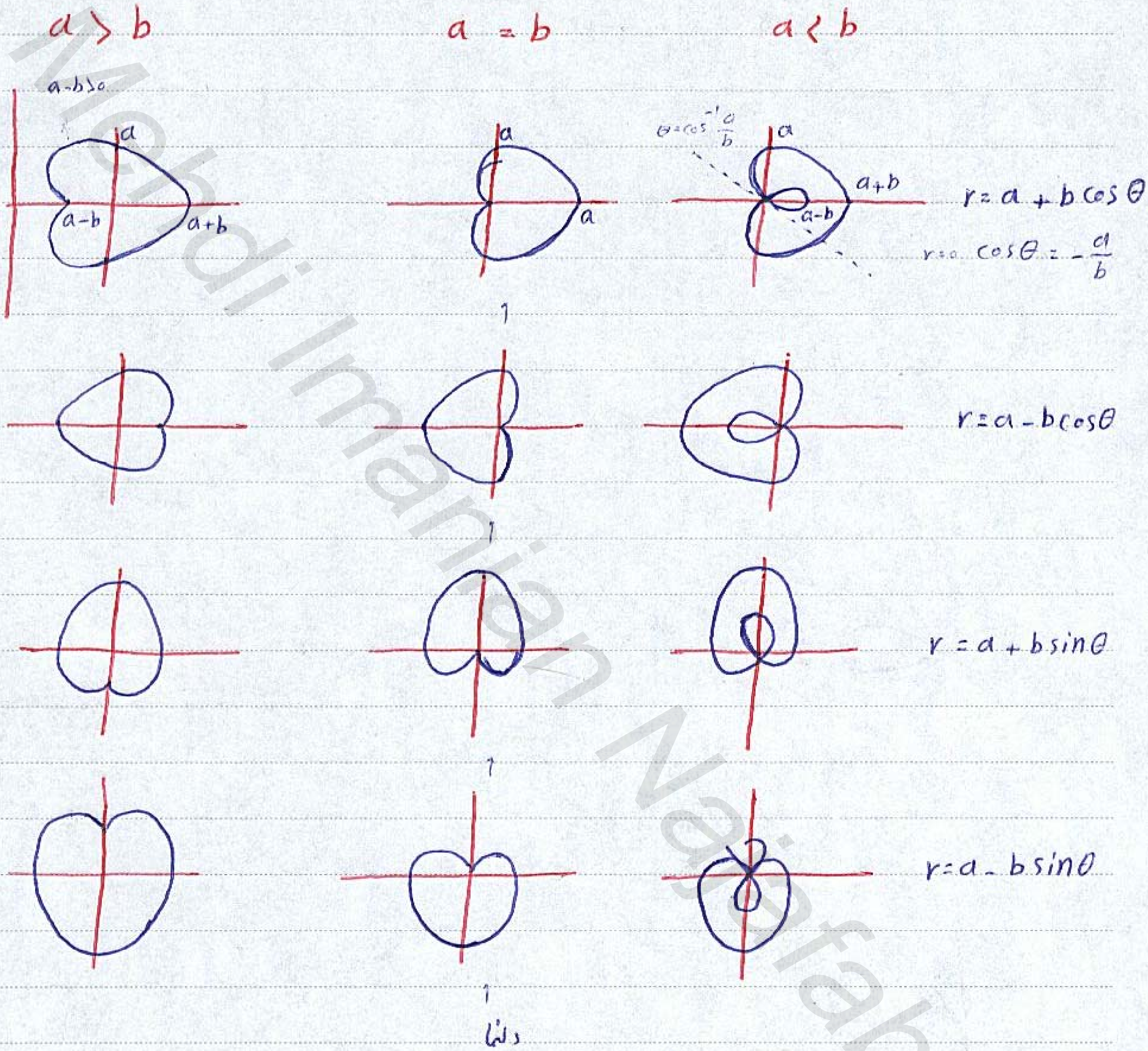


$r^2 = a\sin 2\theta$

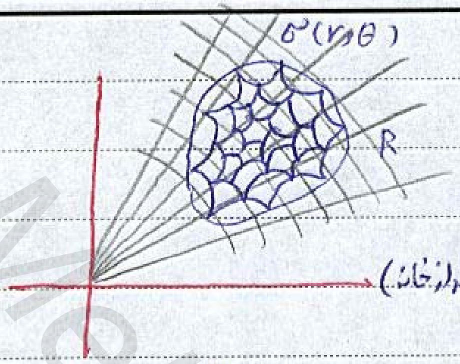
PAPCO

لیماکون

$r = a \pm b\cos\theta$ یا $r = a \pm b\sin\theta$



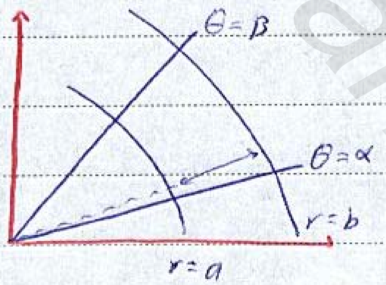
دلنما در فضا در اثر چرخش دلوار می شود



نرم Δ یعنی طول بزرگترین قطر یک خانه (بزرگترین فاصله بین دو نقطه از خانه)

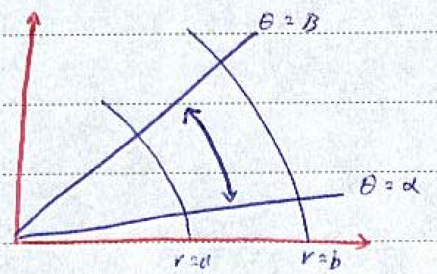
$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma(r_i,\theta_i)\,\Delta_i A = L \qquad \iint_R f(r,\theta)\,dA$$

$$\Delta_i A = \underset{r}{\overset{\frac{1}{2}(r_i+r_{i-1})}{r_i}}\,\Delta_i r\,\Delta_i\theta = r\,dr\,d\theta \qquad \iint_R f(r,\theta)\,r\,\overset{d\theta\,dr}{dr\,d\theta}$$

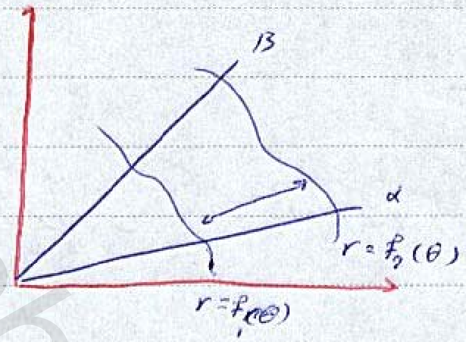


باند بیرونی باید همواره عدد باشد تا حاصل انتگرال یک عدد شود

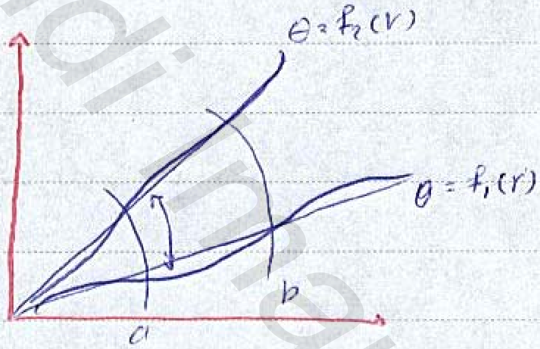
$$\int_\alpha^\beta \int_a^b f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$



$$\int_a^b \int_\alpha^\beta f(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr$$



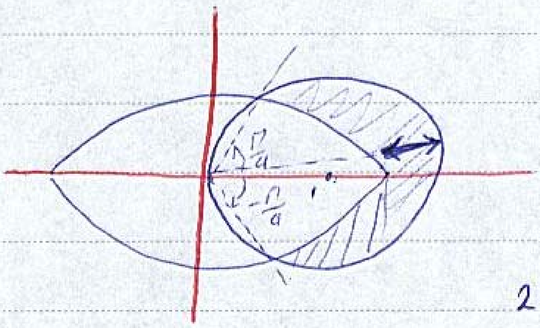
$$\int_\alpha^\beta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



$$\int_a^b \int_{f_1(r)}^{f_2(r)} f(r,\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

1- مساحت فاصله بين $r=2\cos\theta$ و $r=\sqrt{2}$

داخل خارج



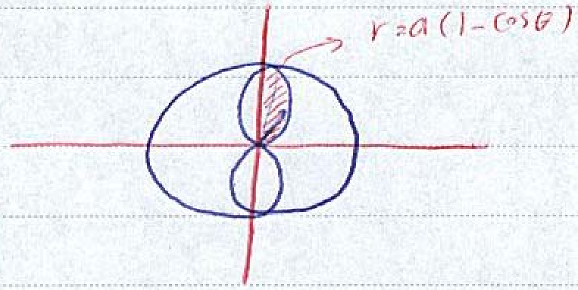
$$\sqrt{2} = 2\cos\theta \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sqrt{2}}^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$$

چون مساحت مطلوب بود

لازم نبود $f(r,\theta)$ نوشته شود.

2- ناحيه مشترک $r=a(1-\cos\theta)$, $r=a(1+\cos\theta)$



$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a(1-\cos\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

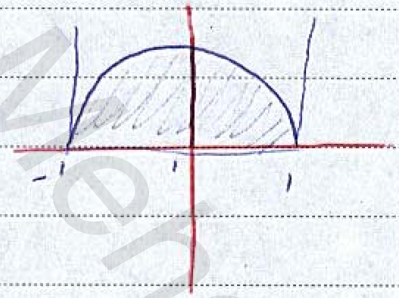
$x^2 + y^2 = r^2$

$\theta = tg^{-1}\dfrac{y}{x}$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\underline{\underline{r}}\,dr\,d\theta$$

ژاکوبین تبدیل $|J| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r$

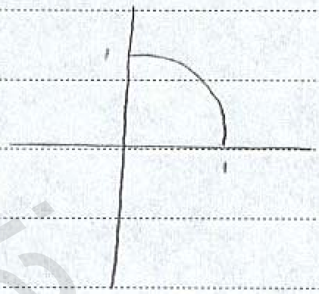
7) $$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$$



$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} r(r^2)^{3/2}\, dr\, d\theta$$

8- اگر R ناحیه محدود به $x^2+y^2=1$ در ناحیه اول مختصات باشد ابتدا نگاه

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$



$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} r e^{-r^2}\, dr\, d\theta$$

تغییر متغیر در انتگرال دوگانه:

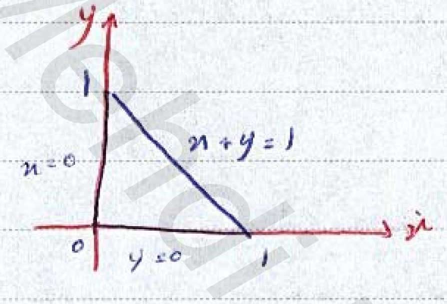
$x = h(u, v)$

$y = g(u, v)$

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(h(u,v), g(u,v))\, |j|\, du\, dv$$

$$j = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

۱ـ اگر D ناحیه محصور بین $x+y=1$ ، $y=0$ و $x=0$ آنگاه $\iint e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy$ فوق محاسبه نسبت به x و y



$u = x-y$

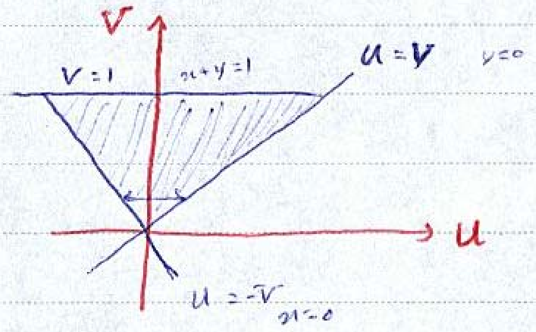
$v = x+y$

$x = \frac{1}{2}(u+v)$

$y = \frac{1}{2}(v-u)$

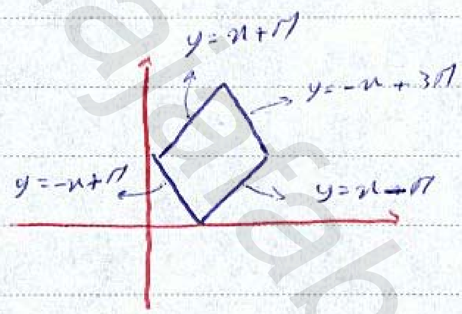
$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\,du\,dv$$



2ـ اگر R درون چهارضلعی با رئوس $(\pi,0)$ و $(2\pi,\pi)$ و $(\pi,2\pi)$ و $(0,\pi)$ محصور باشد آنگاه

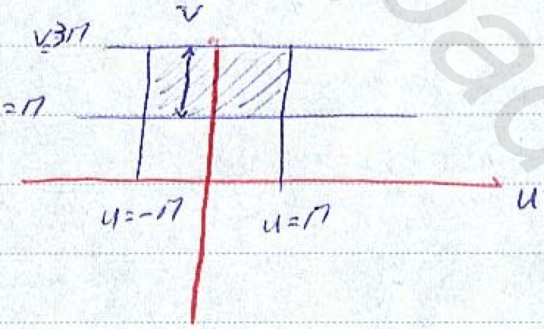
$$\iint (x-y)^2 \sin^2(x+y)\,dx\,dy$$



$u = x-y$

$v = x+y$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\pi}^{3\pi} u^2 \sin^2 v\,dv\,du$$



۳ـ

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)}\, dy\, dx$$

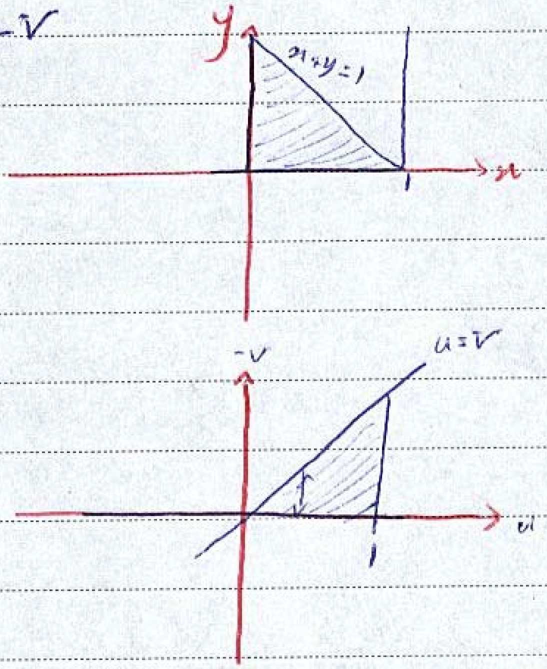
تحقیق کلاسی

$x+y=u \qquad x=u-y=u-v$

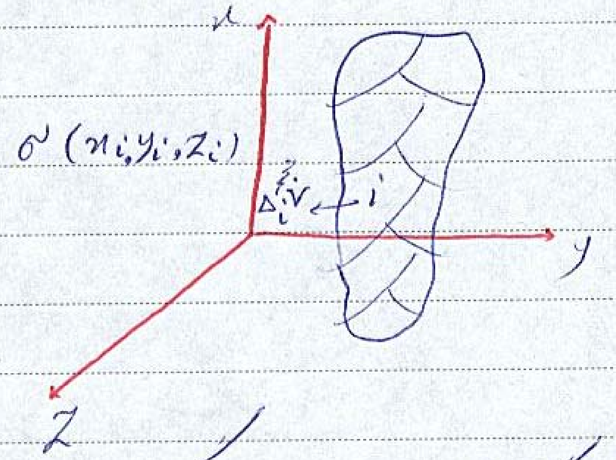
$y=v \qquad y=v$

$$J=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

$$=\int_0^1 \int_0^u e^{v/u}\, dv\, du$$



انتگرال سه‌گانه:



$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i, z_i)\,.\,\Delta_i V = L$$

$\|\Delta\|$ نرم Δ طول بزرگترین قطر این خانه‌ها و بزرگترین قطر برابر است با بزرگترین فاصله بین دو نقطه در خانه

$$=\iiint_D f(x,y,z)\, dV$$

اگر افرازبندی منظم $\Delta_i V = \Delta_i x \,.\, \Delta_i y \,.\, \Delta_i z$

بوسیله صفحات موازی با محورهای مختصات انجام شود

مکعب مستطیل دراین سیستم از دو x و دو y و دو z ثابت تشکیل می شود و المان حجمی را تشکیل می دهد

بازه بیرونی حتماً باید دو عدد باشد

معمولاً در انتگرال اول المان رو به z باز می شود

رویه های فضایی

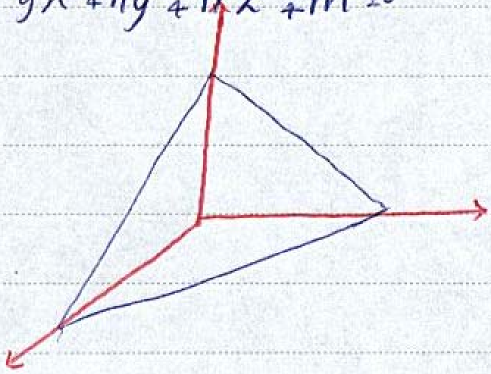
سطوح درجه دوم فضا :

صورت کلی : $\underbrace{ax^2+by^2+cz^2}+\underbrace{dxy+exz+fyz}+\underbrace{gx+hy+nz+m}=0$

نباشد صفحه

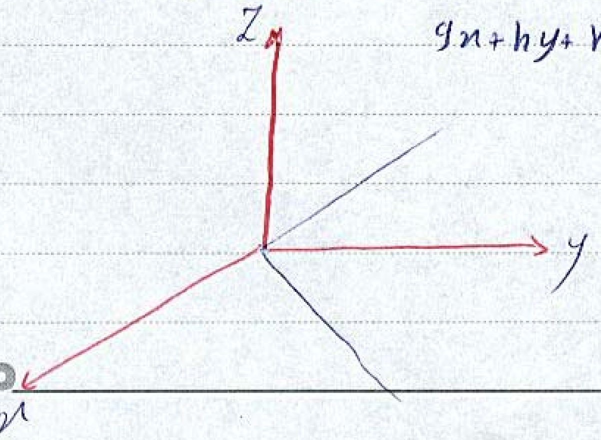
$ax^2+by^2+cz^2+nz=0 \qquad n\neq 0$

$gx+hy+nz+m=0$



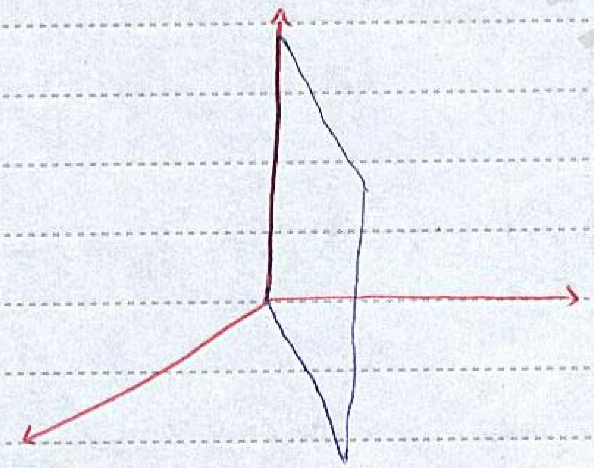
$ax^2+by^2+cz^2=0 \qquad n=0$ از مبدأ مختصات می گذرد

$gx+hy+nz+m=0$



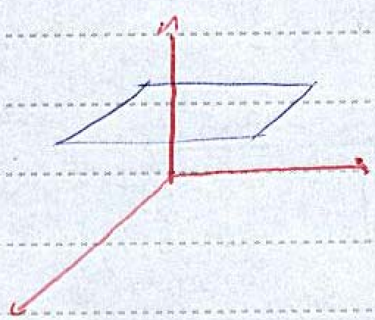
صفحه‌ای به موازات محور Z ها $d \neq 0$ $ax+by+d=0$

صفحه‌ای به موازات محور Z ها که از مبدأ می‌گذرد، $d=0$ و $ax+by+d=0$



و فرض $Z=Z_0$

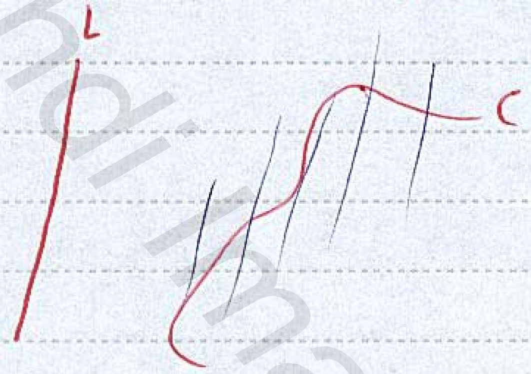
به موازات صفحه xy



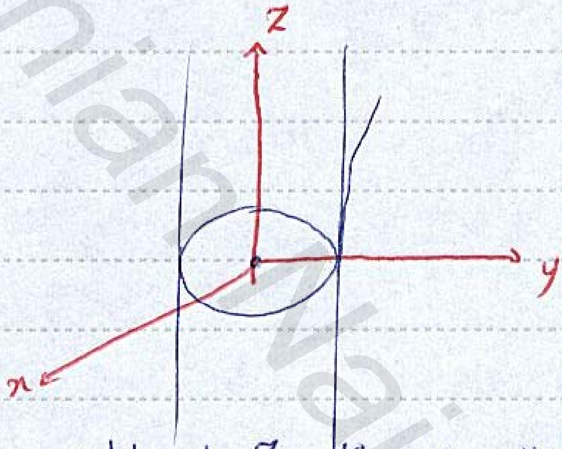
استوانه‌ها:

اگر منحنی C درون یک صفحه و خط L غیر واقع در آن صفحه موجود باشد استوانه رویه‌ای است که از حرکت خطی به موازات L روی C پدید می‌آید

منحنی C منحنی هادی و خط L مولد است.



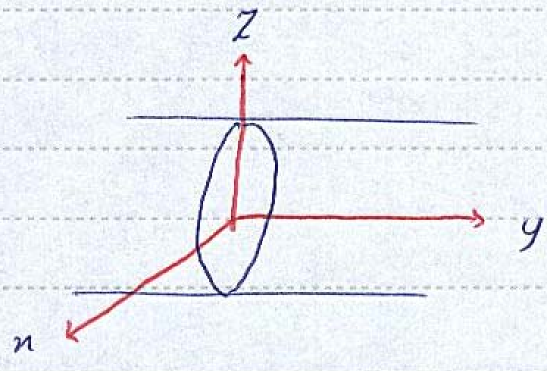
1) $x^2+y^2=R^2$



مستقل از z <= به ازای جمیع مقادیر z دایره را داریم

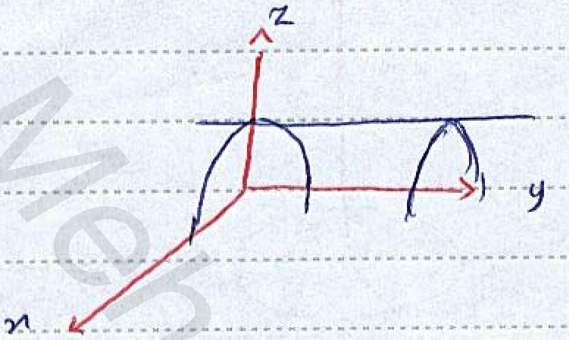
استوانه‌ای که منحنی هادی دایره‌ای به معادله $x^2+y^2=R^2$ و مولد آن محور z هاست که به آن استوانه مستدیر گویند (هادی آن در تمام مقاطع دایره است)

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ استوانه بیضوی

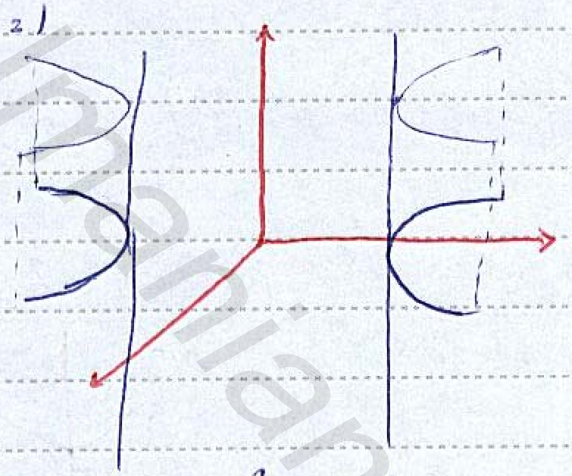


3) $x^2 + z = 1$ y ندارد پس به y مقدار دهیم

استوانه سهمی منفی عادی در صفحه xoz



4) $-\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ استوانه هذلولی



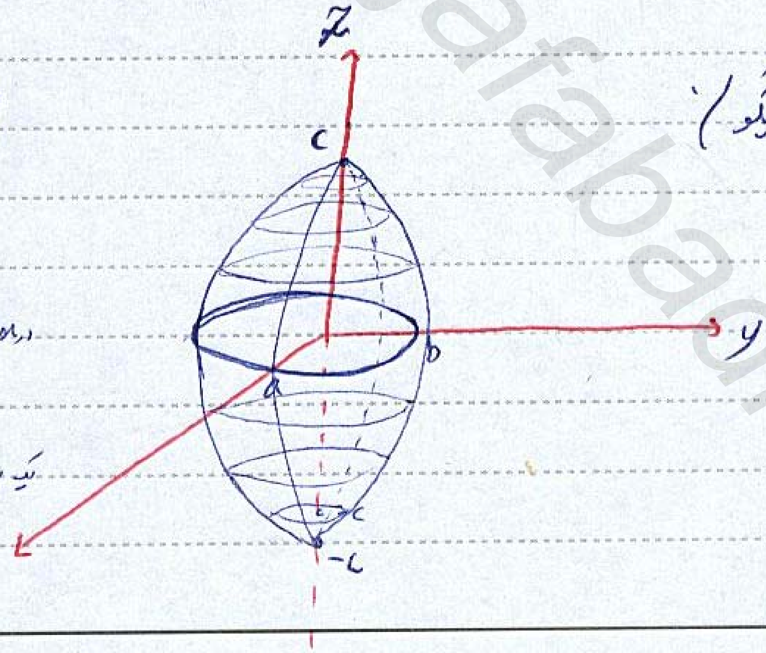
اگر یکی از پارامترهای x و y و z غائب باشند می شود استوانه

5) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2 \Leftarrow$ یک کره به مرکز (α, β, γ) و به شعاع R

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ بیضیگون

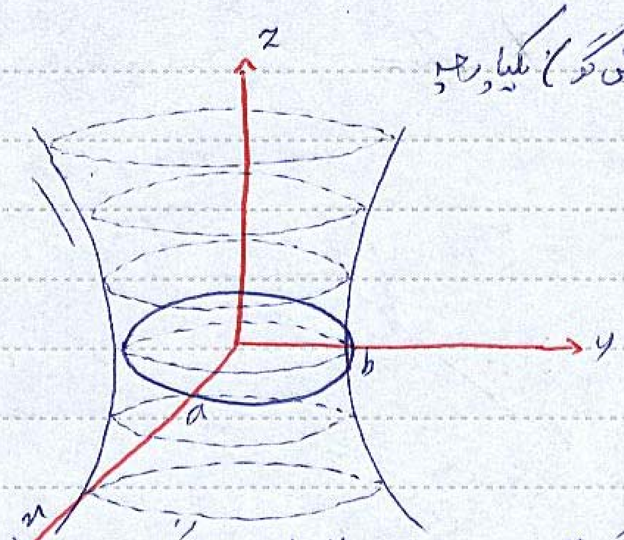
1) ⇒ $z = 0$ ⇒ در xoy یک بیضی داریم

2) $z = \alpha < c$ ⇒ یک بیضی به موازات xy با شعاع های کوچکتر



7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

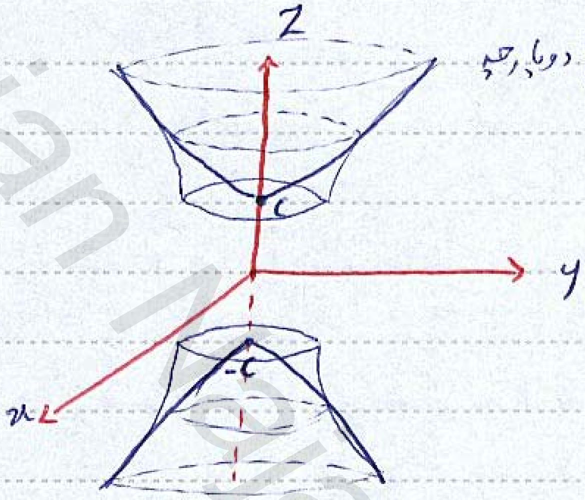
هذلولی‌گون یکپارچه



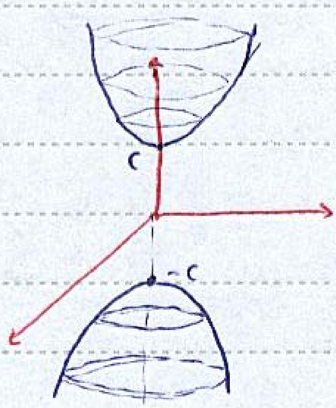
اگر به z عدد بدهیم چون منفی است اگر به سمت راست تساوی برود با یک جمع می‌شود که اگر کل معادله را به عدد سمت راست تساوی تقسیم کنیم تا یک حاصل شود می‌بینیم که با افزایش z شعاع بیضی‌ها افزایش می‌یابد

8) $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

هذلولی‌گون دوپارچه



$z > c$



به z کوچکتر از c نمی‌توان داد زیرا توان۲ دو عدد منفی می‌شود

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{Z}{c}$

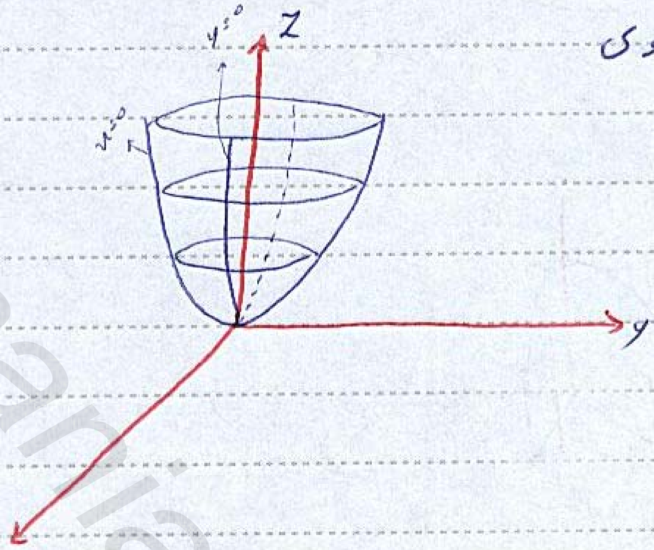
if $c>0 \Rightarrow Z>0$ ⇐ سمت چپ مثبت ⇐ سمت راست هم مثبت ⇐

if $c<0 \Rightarrow Z<0$

سهمیگون بیضوی

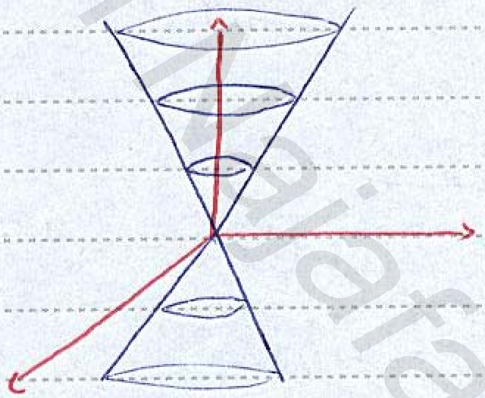
$Z=0 \Rightarrow x=y=0$

$c>0$

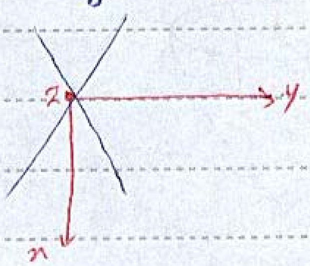


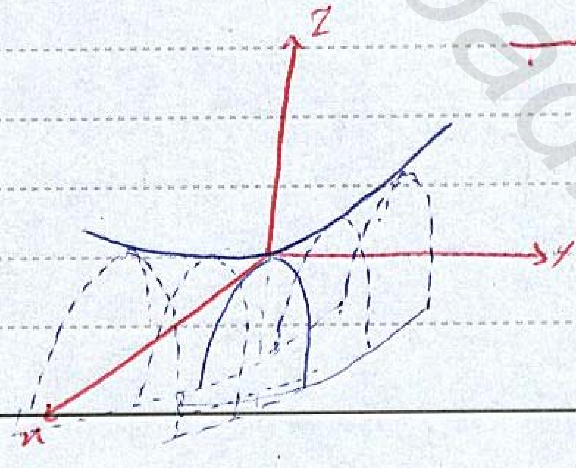
10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{Z^2}{c^2}$

if $a=b \Rightarrow$ مخروط دایره



11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{Z}{c}$ $c>0$ زین اسب





اگر dxy وارد معادله شود محور x و y یک دوران 45° پیدا می‌کند

〃 exz 〃 〃 〃 〃 z و x 〃 〃 〃 〃 〃

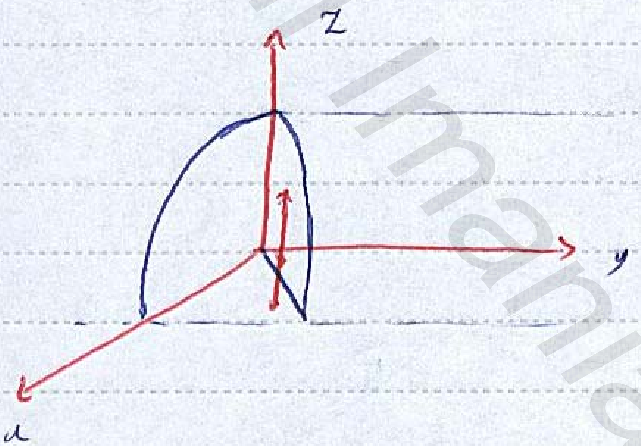
〃 fyz 〃 〃 〃 〃 z و y 〃 〃 〃 〃 〃

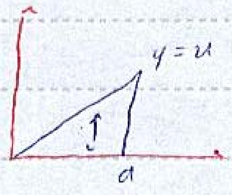
1- حجم جسم محدود بوسیله رویه‌های به معادلات زیر را بدست آورید؟

$x^2+z^2=a^2$

$y=0$ و $x=0$ و $z=0$

$y=x$



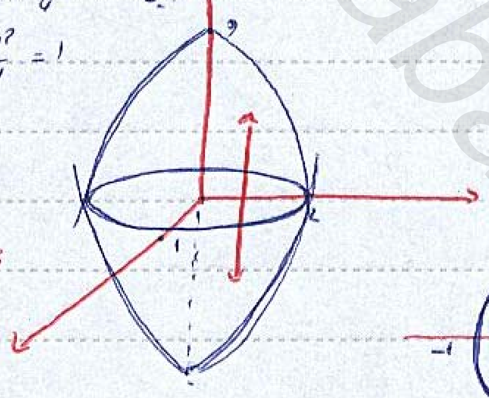


$$\int_0^a\int_0^x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx$$

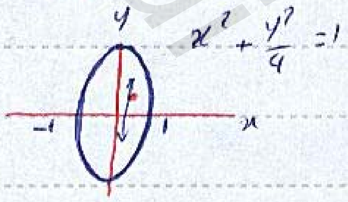
2- حجم جسم محدود به رویه‌های به معادلات زیر را بدست آورید

$36x^2+9y^2+4z=36$ (1) $z=0$ $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ یعنی

$4x^2+y^2-z=4$ (2) $z=0$ $x^2+\frac{y^2}{4}=1$



$$\int_{-1}^{1}\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}}\int_{4x^2+y^2-4}^{9-9x^2-\frac{9}{4}y^2} dz\,dy\,dx = 13$$



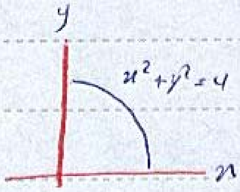
می‌توان تقارن را گرفت و برای $\frac{1}{4}$ بدست آورد در 4 ضرب کرد

-3

$x^2+y^2=4$

$x^2+z^2=4$

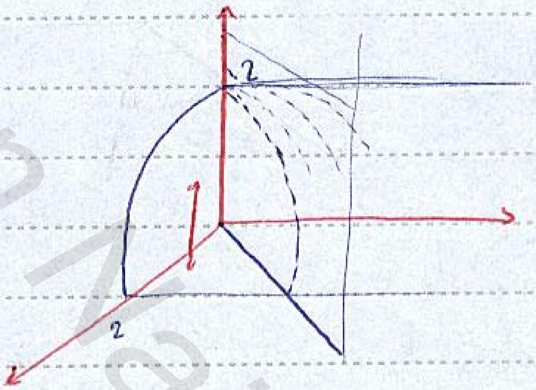
$x\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ y\geqslant 0$



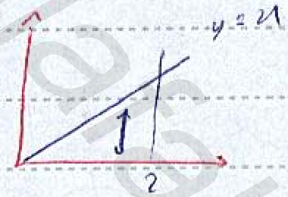
$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dz\,dy\,dx=\frac{16}{3}$$

4 مقدار انتگرال سه‌گانه تابع f در ناحیه محصور به صفحات زیر را بیابید

$y=z=0\ ,\ x=y\ ,\ z=2-\frac{1}{2}x^2$



$$\int_0^2\int_0^x\int_0^{2-\frac{1}{2}x^2} 2xyz\,dz\,dy\,dx=$$



$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint f(h(u,v,w),g(u,v,w),k(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw$$

$x=h(u,v,w)$

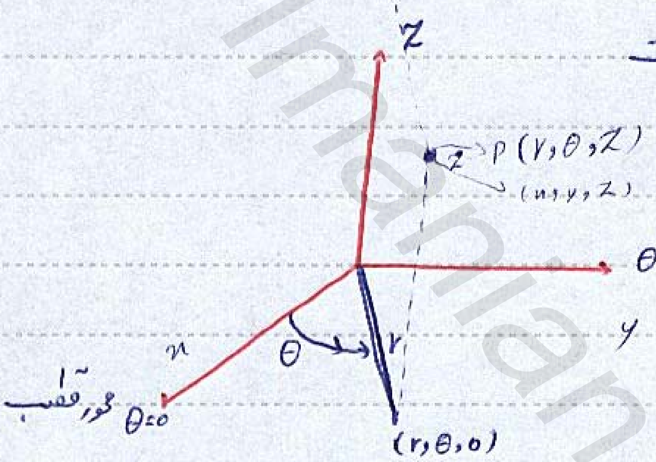
$y=g(u,v,w)$

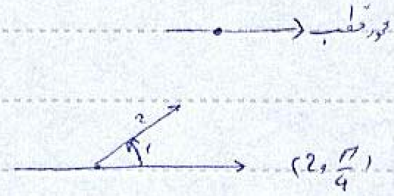
$z=k(u,v,w)$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & \partial x/\partial w \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & \partial y/\partial w \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v & \partial z/\partial w \end{vmatrix}$$

انتگرال سه‌گانه در مختصات استوانه‌ای:

صفحهٔ xy صفحهٔ قطبی است
و محور z همان محور z هاست





$r \in R$

$z \in R$

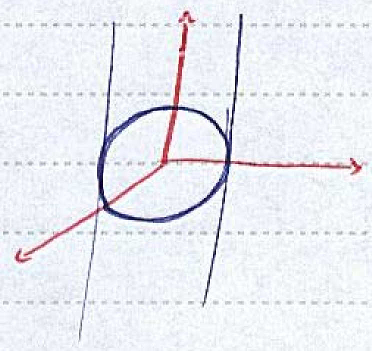
$0 \leq \theta \leq 2\pi$

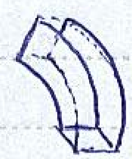
$z = z_0$ صفحه‌ای موازی صفحه قطبی

$\theta = \theta_0$ 〃 عمود بر محور z هاست

و با صفحه xoz زاویه θ_0 می‌سازد

$r = r_0$ استوانه





$dv = r\,dr\,d\theta\,dz$

$$\iiint_D f(r,\theta,z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

در موارد که انتگرال‌های سه‌گانه درگیر با استوانه یا قسمتی از استوانه است ترجیحاً وارد سیستم استوانه‌ای می‌شویم

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

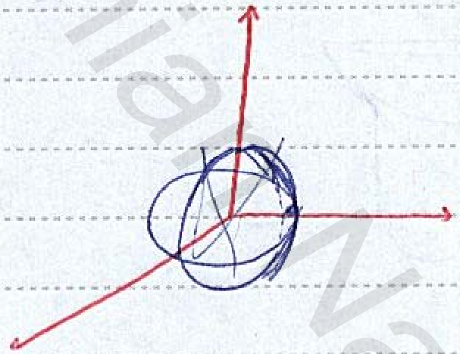
$z = z$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$ تبدیل دکارتی به قطبی

این r ، r ژاکوبین تبدیل است و با r شعاع فرق می‌کند

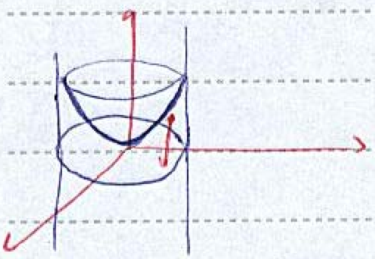
فقط در تبدیل قطبی استوانه‌ای و دکارتی ژ با مقادیر بدست آمده باهم یکی است

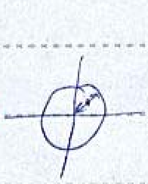
$r^2 + z^2 = 4$



کره

۱- حجم محدود بین دو رویه به معادلات $x^2+y^2=1$ و $z=x^2+y^2$ کدام است — با صفحه xy یا $z=0$

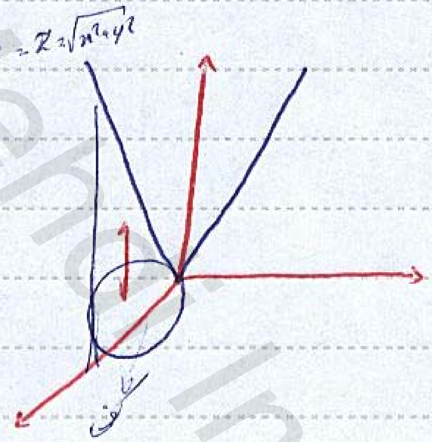


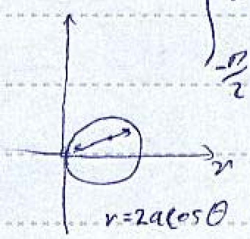


$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

2- حجم محدود به صفحه $z=0$ از پایین و $z=\sqrt{x^2+y^2}$ از بالا و $x^2+y^2-2ax=0$ از اطراف کدام است

$(x-a)^2+y^2=a^2$

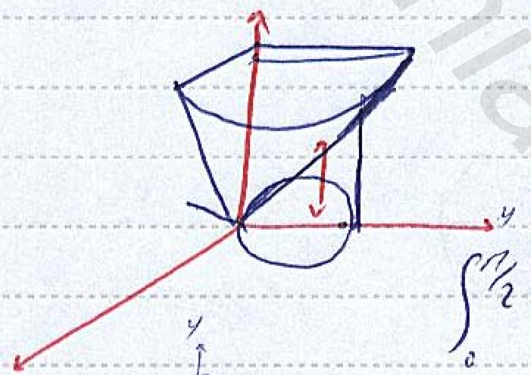




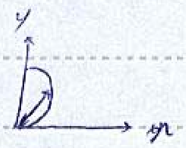
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

3- حجم بین $z=r$ ، $r=\sin\theta$ و $x\geq0$ ، $y\geq0$ ، $z\geq0$ کدام است؟

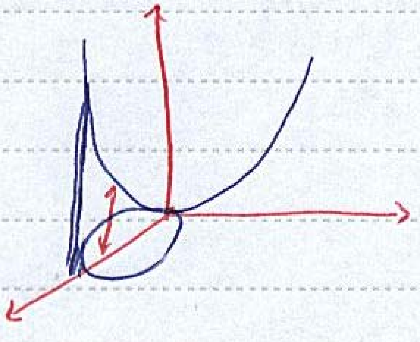
$z=r$ ⇐ θ ندارد ⇐ θ را می‌توان ثابت کرد مثلاً $\theta=90^\circ$



$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin\theta}\int_0^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$



4- حجم بین $az=x^2+y^2$ ، $z=0$ ، $x^2+y^2=2ax$ ، $a\geq0$ کدام است



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^{r^2/a} r\,dz\,dr\,d\theta$$

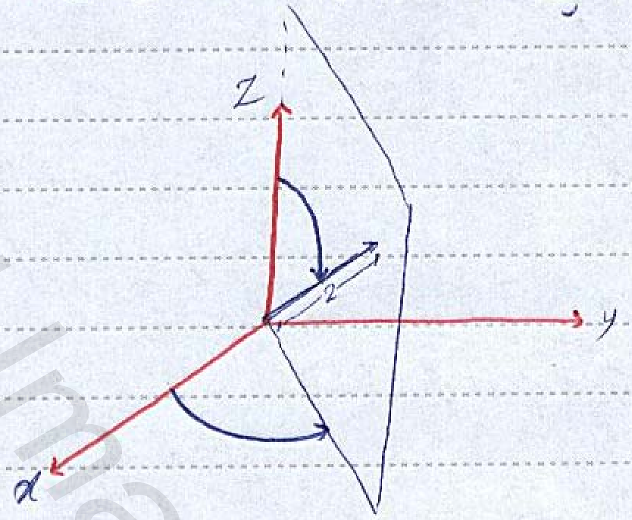
سیستم کروی

هر نقطه بوسیلهٔ سه‌تایی $P(\rho, \phi, \theta)$ مشخص می‌شود.

$\rho \geq 0$

$0 \leq \phi \leq \pi$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

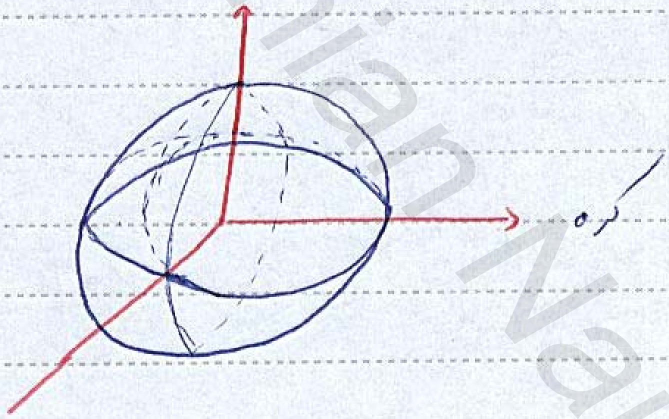


$(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$

ϕ با محور z ها

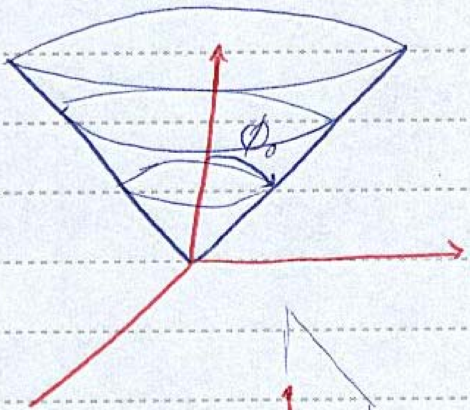
θ با محور x ها

$\rho = \rho_0$

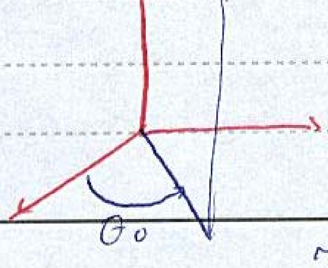


کره

$\phi = \phi_0$



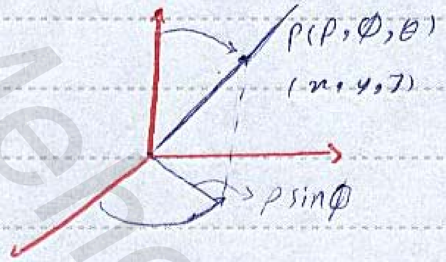
$\theta = \theta_0$



با صفحه $y=x$ زاویه θ می‌سازد

نیم صفحه

$dv = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$



کره و مخروط ⟸ وارد سیستم کروی می‌شود

$z = \rho \cos\phi$

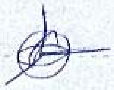
$x = \rho \sin\phi \cos\theta$

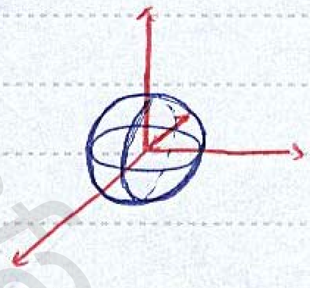
$y = \rho \sin\phi \sin\theta$

$J = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

۱- جرم یک کره توپر به شعاع واحد که چگالی در هر نقطه برابر با فاصله آن نقطه از مرکز است

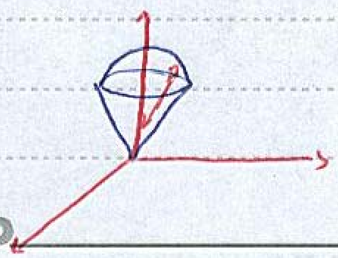
$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \underbrace{\rho}_{\text{چگالی}} \, \rho^2 \sin\phi$$





اول در جهت ρ باز می‌شود

2- گشتاور ماند حول محور z ها برای حجم محدود از بالا به کره $\rho = 1$ و از پایین به مخروط $\phi = \frac{\pi}{3}$ و چگالی $\delta = 1$ کدام است.



گشتاور ماند حول محور z های می‌شود که $\sigma = \rho^2 \sin^2\phi \; (x^2 + y^2)$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{1}\rho^2\sin^2\phi\;\rho^2\sin\phi\;d\rho\,d\phi\,d\theta$$

3- حجم محدود به کره $x^2+y^2+z^2=1$ و داخل مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کدام است.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{1}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\cancel{\rho}\cos\phi=\cancel{\rho}\sin\phi$ $\phi=45^\circ$

4- $x^2+y^2+z^2=1$ ، $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و $z\geq 0$

$$\iiint xyz\,dV$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1}(\quad)(\quad)(\quad)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

5- حجم مخروط $\phi=\frac{\pi}{3}$ به ارتفاع 5 کدام است

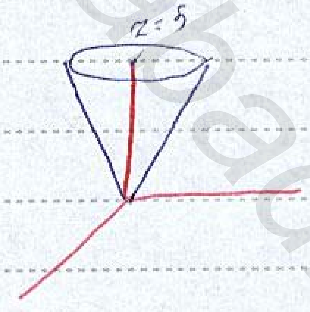
$\frac{2}{3}\times\pi\times2.5^2\times5$

31.4 | 3
3 | 10.47
01.4
12
20

10.44

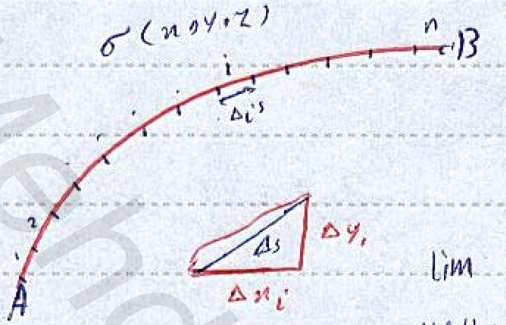
2.5
×2.5
125
500
6.25

$$\int_0^{\pi/3}$$



انتگرال منحنی الخط: نوع اول

طول قوس و حجم را می توان محاسبه کرد.



$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta_i s$$

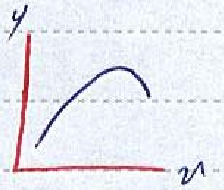
$$\int_C f\,ds$$

منحنی در فضا حتماً باید پارامتری شود.

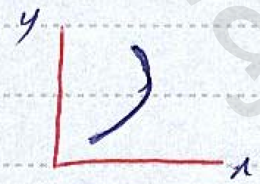
$$\Delta s = \sqrt{\Delta_i x^2 + \Delta_i y^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$\Delta_i x^2 \left(1 + \frac{\Delta_i y^2}{\Delta_i x^2}\right)$$

$$\int f(x,y)\,ds = \int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x)) \sqrt{1+g'^2(x)}\,dx$$



باید روی محور x ها تصویر شود



باید روی محور y تصویر شود

$$\int f(x,y,z)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

۱- حاصل انتگرال زیر روی منحنی $y=2\sqrt{x}$ کدام است $x=3$ تا $x=24$

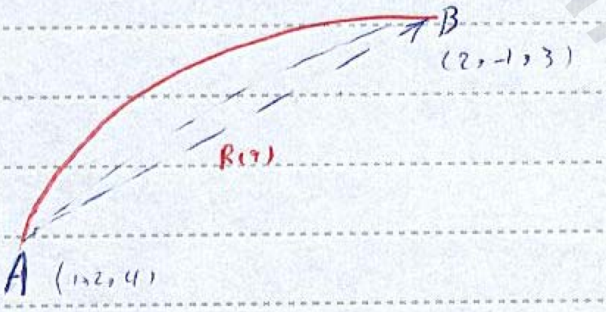
$$\int_C y\,ds = \int_3^{24} 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 2\int_3^{24}\sqrt{x+1}\,dx$$

2-

$$\int_C xy^2\,ds \quad \text{و} \quad C:\ x=\cos t,\ y=\sin t \quad \text{و} \quad 0\le t\le \pi/2$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos t\,\sin^2 t\,\sqrt{\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{1}}\,dt = \cancel{\cos^2 t}$$

انتگرال منحنی الخط نوع دوم: کار



فرض می‌کنیم مستقل از مسیر باشد

$$\vec{R(t)} = (1-t)A + tB \qquad 0\le t\le 1$$

$$\vec{R(t)} = (1-t)(i+2j+4k) + t(2i-j+3k)$$

$$\underbrace{(1-t+2t)}_{x}i + \underbrace{(2-2t-t)}_{y}j + \underbrace{(4-4t+3t)}_{z}k$$

ct: Month. Date. ( )

فرض نیرو = $\vec{F} = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$

$$W = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$ میدان نگهدار و می توان از روی خط مستقیم حرکت کرد در غیر اینصورت باید روی مسیر منحنی حرکت کرد

$$\vec{F} = P\,i + Q\,j + R\,k$$

$$W = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dZ$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial Z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

۱- مقدار انتگرال زیر روی منحنی $y = x^5$ کدام است $(0,0)$ تا $(1,1)$

$$\int_C (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$$

$$\frac{\partial (x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} = 2y$$

میدان نگهدار است

$(0,0)$, $(1,1)$ $\Rightarrow y = x$

$x = t$

$y = t$

$$\int_0^1 (2t^2 + 2t^2)\,dt$$

اگر یک معادله مسیر بسته زیر انتگرال بود و انتگرال صفر نشد یعنی مستقل از مسیر نبود (اگر بتوان) عامل این عدم استقلال را پیدا کرد و انتگرال آن را جدا حساب کرد بقیه مستقل از مسیر است که انتگرال آن صفر است $\oint$ [illegible] صفر

-2

$x = \cos t$

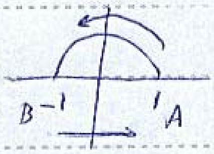
$y = \sin t$

$0 \leq t \leq \pi$

$$\int_C e^y dx + x e^y dy$$

مستقل از مسیر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$-\int_{-1\,(B)}^{1\,(A)} dt$$



$x = t \quad -1 \leq t \leq 1$

$y = 0$

-3

$$\int x^2 y^3 dx + dy + \cancel{z\,dz}^{\,z=0}$$

$C: \quad x^2 + y^2 = R^2$

$z = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$

$x = R\cos\theta$

$y = R\sin\theta$

باید روی منحنی حرکت کرد و مستقل از مسیر نیست

$$\int_0^{2\pi} (-R^6 \cos^2\theta \sin^4\theta + R\sin\theta)\, d\theta = \frac{\pi R^6}{8}$$

ct:

Month. Date. ( )

-4

$$\int_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \frac{8}{9} \qquad C: x = \frac{t}{1+t} \;,\; y = \frac{1}{t+1} \quad 0 < t < 2$$

$t = 0 \Rightarrow (0, 1)$

$\Rightarrow$ می‌توان روی خط مستقیم حرکت کرد

$t = 2 \Rightarrow (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

$(1-t)(j) + t(\frac{2}{3} i + \frac{1}{3} j)$

$x = \frac{2}{3} t \qquad y = 1 - \frac{2}{3} t \quad , \quad 0 < t < 1$

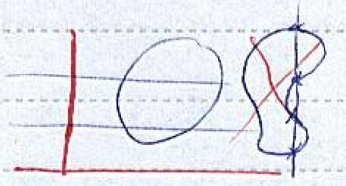
$\vec{F} = p\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

$W = \int_C p\,dx + Q\,dy + R\,dZ$

اگر مستقل باشد (نگهدار باشد)

$\vec{R(t)} = (1-t)A + tB \qquad 0 < t < 1$

قضیه گرین: $\oint_C p\,dx + Q\,dy$



فقط برای صفحه است و برای فضا مطرح نمی‌شود

حتماً باید مسیر بسته باشد جهت حرکت جهت مثلثاتی

مسیری که داریم باید نسبت به محورها منظم باشد یعنی هر خطی موازی محورها آن را حداکثر در دو نقطه قطع کند

طول ناحیه مشتق جزئی مرتبه اول داشته باشد

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \overbrace{dx\,dy}^{dA}$$

کاربرد دیگر در محاسبه مساحت است

$$\text{مساحت ناحیه } R = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\iint_R dA$$

$$= \oint_C x\,dy$$

$$= \oint_C -y\,dx$$

محاسبه مساحت بیضی فقط با قضیه گرین ممکن است.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}\right\} A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ba\cos^2\theta + ab\sin^2\theta \, d\theta$$

۱- مقدار انتگرال ... که در آن $C: x^2+y^2=a^2$ دایره است که یک بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده کدام است

$$\int \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$$

مسیر بسته: انتگرال در صفحه: دایره‌ای شکل

-2π ✓

0

2π

π

چون مسیر بسته است باید حتما شرط نگهدار بودن میدان چک بشود

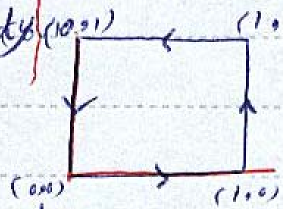
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2-y^2-2x(y-x)}{(x^2+y^2)^2} \quad x^2+y^2-2xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \quad x^2+y^2-2xy$$

هیچکدام در داخل مرکز دایره (0,0) مشتق جزئی مرتبه اول ندارند (موجب صفر می‌شود) درنتیجه شرط گرین صادق نیست
⇐ باید روی مسیر حرکت کرد
در تمام نقاط صفحه ذکر شده باید مشتق داشت

-2

$$\oint_c (e^{-x^2}+y^2)\,dx + (\ln y - x^2)\,dy = \int_0^1\int_0^1 -2(x+y)\,dx\,dy = -2$$



چون نوک تیز دارد ⇐ منحنی معادله در چهار نقطه تغییر می‌کند ⇐ چهار معادله داریم و باید در روشهای عادی چهار بار انتگرال بگیریم

$$C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \qquad -3$$

$$\oint_c (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy$$

فقط گرین

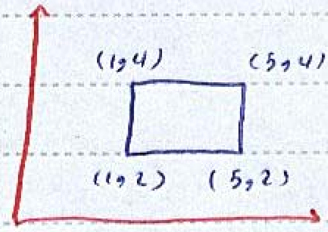
$$= \iint (2-6)\,dA = -4 \times 2\pi \cdot 2 \ \text{مساحت دایره به شعاع}\ 2 = -16\pi$$

اگر خلاف جهت مثلثاتی حرکت شود در منفی ضرب می‌شود

4- c: مستطیلی به رئوس (1,4) - (5,4) - (5,2) - (1,2)

بنابر گرین برقرار است

$$\oint_c (e^{x^2}+y)\,dx + (x^2 - \tan^{-1}\sqrt{y})\,dy = \int_2^4\int_1^5 (2x-1)\,dx\,dy$$



5- c: مربعی به اضلاع $|x|=1$ و $|y|=1$

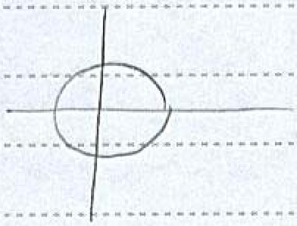
$$\oint_c (x^2+xy)\,dx+(y^2+x^2)\,dy = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (2x-x)\,dx\,dy = 0$$ تابع فرد است

6- که در آن c منحنی ساده بسته حاوی (صفر و صفر) است که ادامه باشد

$$\int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi$$

(دو) قضیه گرین صادق نیست

می‌توان اطراف آن یک دایره زد که صفر و صفر داخل باشد



$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$0 \le \theta \le 2\pi$

7- $$\int_c (x^3+2y)\,dx + (4x-3y^2)\,dy = \iint (4-2)\,dA = 4\pi$$

گرین صادق است.

$c: x^2+4y^2=4$ بیضی

8- $c: x^2+\frac{y^2}{1/4}=1$

$$\oint_c y\,dx+3x\,dy = 2\iint dA = 2\times\frac{1}{2}\pi$$

$a=1$

$b=\frac{1}{2}$

$$\int_c (\sin^4 x + e^{2x})\,dx + (\cos^2 y - e^y)\,dy = 0$$ -٩

$c: x^4 + y^4 = 16$

انتگرال رویه

S: سطح هموار (تو پر) دست روی آن کشیده شود نوک تیز احساس نکنیم) و h روی S تعریف شده باشد

$$\iint_S h(x,y,z)\,ds$$ $p\,z <= h = c$

اگر S مشتق از رویه $z=f(x,y)$ باشد که تصویر قائم (آن) روی صفحه xy ناحیه R باشد و تصویرِ تصویر واقعی باشد

$$\Rightarrow \quad = \iint_S h(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

f_x مشتق نسبت به x

f_y مشتق نسبت به y

$$\iint_S ds = \iint_R \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy$$

★ ★ ★ بحث گذشته

دل $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$

$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$ = بردار

f تابع اسکالر

گرادیان f تابع برداری

ضرب — کند در بردار

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$ بردار

اگر F هم برداری باشد

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$ بردار

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$ معادله دایورژانس

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$ معادله کرل

مثال:

$$f = 3x^2 y z$$ اسکالر

$$\nabla f = 6xyz\, i + 3x^2 z\, j + 3x^2 y\, k$$

مثال:

$$\vec{F} = (3x + yz) i + (4xyz) j + 3yz\, k$$

$$\nabla \cdot F = 3 + 4x\overset{z}{\cancel{y}} + 3y$$

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x+yz & 4xyz & 3yz \end{vmatrix} = (3z - 4xy) i - (0 - y) j + (4yz - z) k$$

☆ ☆ ☆

ct:

Month. Date. ( )

فرض کنیم S یک رویه هموار به معادله $G(x,y,z)=0$ و $n = \dfrac{\vec{\nabla} G}{|\vec{\nabla} G|}$ بردار یکه قائم

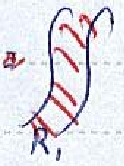
بر رویه G برای میدان برداری $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ که روی S پیوسته است

$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds$ را شار (نیروی) F در امتداد S گویند

n و F هم‌سو بردار ⇐ ضرب نقطه‌ای دو بردار اسکالر می‌شود.

روش محاسبه $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds$:

$$\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds = \iint_R \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{|n\cdot k|}\,dx\,dy$$



$$= \iint_{R_1} \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}\cdot j|}\,dx\,dz$$

$$= \iint_{R_2} \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{|n\cdot i|}\,dy\,dz$$

۱- مساحت بیضی بریده شده از صفحه $Z=cx$ از ناحیه $x^2+y^2=1$

یک استوانه داریم که یک صفحه آن را بریده می‌شود (بیضی) که تصویر آن روی xy یک دایره است

$\iint \sqrt{1+c^2}\,dA = \sqrt{1+c^2} \times$ مساحت یک دایره به شعاع ۱ $=\pi$

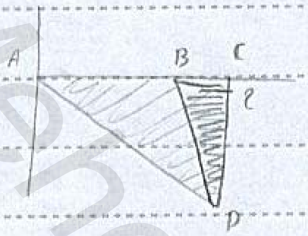
۲- مساحت مثلث با رئوس $A(0,0,0)$ و $B(1,0,2)$ و $C(2,-2,0)$ کدام است

معادله صفحه

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 2-0 \\ 2-0 & -2-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Z = 2x+2y$$

Month. Date. ( )

$$\iint \sqrt{1+4+4}\; dA = 3\int_{-2}^{0}\int_{0}^{+2} dA = 6$$



$A = ACD - BCD$

ج – انتگرال رویه ی میدان برداری

$F = (x-2z)\,i + (x+3y+z)\,j + (5x+y)\,k$

$(0,0,1)$ و $(0,1,0)$ و $(1,0,0)$

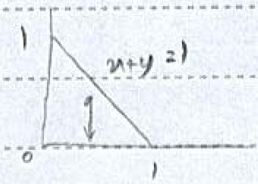
روکش رویه
کدام است؟

$C:\ x+y+z=1 \qquad z = 1-x-y$

انتگرال F روی رویه = شار

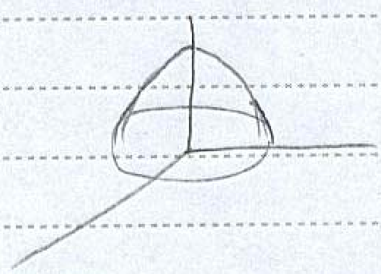
$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$$

$$=\iint_S (F\cdot n)\, dS = \int_0^1\int_0^{1-x} \frac{(x-2\overset{-z=-1+x+y}{z}+x+3y+z+5x+y)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}} = |n\cdot k|}\; dy\, dx$$



$$= \int_0^1\int_0^{1-x} 8x+5y \; dy\, dx = ?$$

۴- انتگرال رویه میدان $F = xz\,i$ را برای آن قسمت از $z = 1-x^2-y^2$ که بالای صفحه $z=0$ قرار دارد برابر است با .



$G: \; z + x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \vec{\nabla} G = 2x\,i + 2y\,j + k$

$$n = \frac{2x\,i + 2y\,j + k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\iint_S (F \cdot n)\,dS = \iint \frac{2x^2 z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1} \times \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}} \, dx\,dy \quad (n \cdot k)$$

$$= \iint 2x^2 (1 - x^2 - y^2)\, dx\,dy$$

به مختصات قطبی می‌بریم:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cos^2\theta \,(1 - r^2)\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{6}$$

5 - مقدار $\iint_\Sigma (x+y+z)\,dS$ که در آن Σ قسمتی از صفحهٔ $x + y = 1$ ، $x, y \geq 0$ و $0 \leq z \leq 1$

کدام است؟

شار نمی‌خواهد

صفحه‌ای به موازات z که می‌توان آن را روی yz تصویر کرد

$y_x = 1 \qquad y_z = 0$

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{2} \qquad I = \int_0^1 \int_0^1 (x + 1 - x + z)\sqrt{2}\, dz\,dx$$

6: اگر φ یک تابع عددی باشد حاصل عبارت زیر کدام است.

$\nabla\times(\nabla\varphi)$ بردار صفر

بردار صفر

$\nabla.(\nabla\times\varphi)$

$\nabla.(\nabla.\varphi)$

عدد صفر

7. اگر $f(x,y,z)=2x^2y-xz^3$ حاصل $\nabla^2 f$ کدام است

$$\nabla^2 f=\nabla f.\nabla f=\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}_{\text{لاپلاسین}}=4y-6xz$$

8- $F=xy^2z^3 i+z^2\sin y\, j+e^{-1/z^2}k \qquad \operatorname{curl} F=?$

$$\operatorname{curl} F=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2z^3 & z^2\sin y & e^{-1/z^2}\end{vmatrix}=(-2z\sin y)i-(-3xy^2z^2)j$$

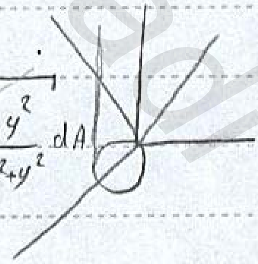
$$+(-2xyz^3)k$$

اگر در نقطه ای خاص curl خواهد بعد از محاسبه curl جایگذاری میکنیم

9- استوانه $x^2+y^2=2x$ از بالا و پایین مخروطی $x^2+y^2=z^2$ قطع شده باشد S را جدا می‌کند

$$\int_S\int(x^4-y^4+y^2z^2-z^2x^2+1)\,dS$$

$$\sqrt{2}\int_R\int(x^4-y^4+y^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)x^2+1)\times\overbrace{\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}}^{\sqrt{2}}\,dA$$



$$=\sqrt{2}\int_R\int dA=\sqrt{2}\times \text{مساحت دایره به شعاع ۱}=\pi\sqrt{2}$$

قضیه واگرایی یا دایورژانس

اگر $F = Pi + Qj + Rk$ و دایورژانس F ، $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ در رویه منظم بسته S و نقاط داخلی آن پیوسته و n بردار یکانی قائم خارجی بر S باشد آنگاه

$\iint (F.n)\,ds$ برابر است با

$$\oiint_S (F.n)\,ds = \iiint_V (\nabla . F)\,dv$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

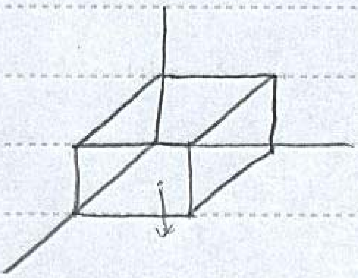
فرمول استراسگرادسکی:

$$\iint_S (F.n)\,ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

تبدیل سؤال

1- $F = xe^{-y} i + e^{-y} j + zk$ و S رویه بسته مکعب مستطیلی به ابعاد 1 و 2 و 3 و n بردار یکانی قائم خارجی بر S باشد؟

$$\oiint_S (F.n)\,ds \overset{?}{=} \iiint 1 \times dV = 6$$ شار



برای سطح کف در xy داریم $z = 0$ ، $\iint_R \frac{\vec{F}.\vec{n}}{|n.k|}$ و $n = -k$

$$\iint_S (\vec{F}.\vec{n})\,ds = \iint \frac{\vec{F}.\vec{n}}{|n.k|} = 0$$

Month. Date. ( )

فرض کنیم سطح بالا سبز نباشد $z=1$ و $n=k$ و دیفرانسیل روی xy کم افتد

$F.n = z = 1$ $|n.k| = 1$ $= \iint_S (F.n) ds = 1$

سطح پشت $y=0$ نیز $y=0$ دیفرانسیل از صفحه xz

$\Rightarrow \iint_S (\vec{F}.\vec{n}) ds = -1$

سطح سمت راست

$\Rightarrow$ جواب مسئله = مجموع این ۶ انتگرال

حاصل انتگرال $\iint F.nds$

۱- $\cancel{F = z(x...)}$ که در آن S سطح کل هرمی است که بوسیله صفحات $x=0$ و $y=0$ و $z=0$ و $x+y+z=a$ محصور است و n بردار قائم خارجی است.

$F = (x, y, z)$

اگر از واگرایی استفاده نشود باید برای ۴ صفحه انتگرال بگیریم و جمع بزنیم

$\iint_S F.n\, ds = \iiint_V 3\, dv$ تا جایی که دیدیم در واگرایی صدق می‌کند.

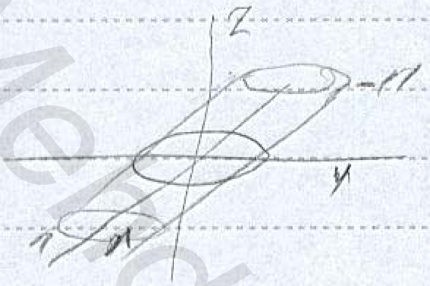
$= 3 \times \frac{1}{3} \frac{a^3}{2} = \frac{a^3}{2}$

۲- حاصل $\iint_\Sigma F.n\,dS$ که در آن $F = xy^2 i + yz^2 j + zx^2 k$ و $\Sigma : x^2+y^2+z^2=4$ کدام است؟

$\iint_\Sigma F.n\, ds = \iiint_V (x^2+y^2+z^2) dv = \iiint \rho^2 \rho^2 \sin\theta\, d\theta$

PAPCO

$\iint_S F.n\,ds = ?$ $F = x^6 i + y\cos^3 x\, j + 2Z k$



$S: y^2 + 4Z^2 \leq 4 \quad -\pi \leq x \leq \pi$

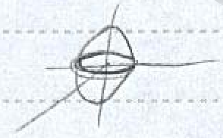
در واگرایی صدق می کند n بردار قائم یکه خارجی

$$\iint_S F.n\,ds = \iiint (6x^5 + \cos^3 x + 2)\,dV$$

$$= \iint \int_{-\pi}^{\pi} (6x^5 + \cos^3 x + 2)\,dx\,dA = \iint a\,dA = a \times \text{مساحت بیضی}$$

حاصل انتگرال داخلی عدد است مثلا a

$\iint_S F.n\,ds = ?$ $F = (x, y, Z)$ دیورژانس $= 3 = 1+1+1$ -3



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

$= 4\pi abc$

$\iint_S F.n\,ds = ?$ $S: x^2 + y^2 + Z^2 = 9, \; F = i x + (1-y) j + (2Z+1) k$ -4

$\iint_S x\,dy\,dZ + y\,dx\,dZ + Z\,dx\,dy = 4 = 3 \times$ حجم هرم -5

$, \; x + y + Z = 2 \quad x = 0, \; y = 0, \; Z = 0$

با فرمول استراگرادسکی برمی گردانیم

$\iint F.n\,dS = ?$ $\quad F = (xy^2, yz^2, zx^2)$ 6

$y^2+x^2+z^2 < \rho^2$ $\quad S: x^2+y^2+z^2 = a^2$

$\iiint \rho^2 \rho^2 \sin\theta \, d\theta$

-7

$\iint F.n\,dS = ?$ $\quad$ نیمکره بالا $= z = \sqrt{1-y^2-x^2}$

$x = y \,,\, x = -y$

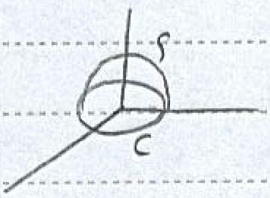
دیورژانس $= 1$ $\quad F = (y^3 e^{z^2} + z^5)i + x^2 z^3 j + zk$

$\iiint = \frac{1}{8}$ حجم کره

فرمول استوکس: $\vec{F}$

$$\int_c p\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \underbrace{(\nabla \times F)}_{\text{کرل}}.n\,dS$$

انتگرال رویه‌ای (اسکالر)



محاسبه کار روی C

$$= \iint_S (\vec{F}.n)\,dS = \iint_R \frac{\vec{F}.\vec{n}}{|n.k|}\,dx\,dy$$

طوری باید روی C حرکت کرد که فضای C سمت چپ ما باشد

۱- فرض $F=2xi+zj+yk$ و S نیمه بالایی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

و C باشد $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ آنگاه:

$$\int_C F\cdot dR = ?\ ? = 0$$

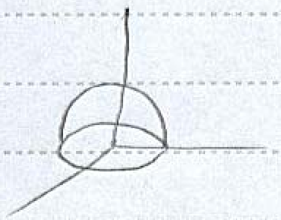
F کرل $= \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & z & y \end{vmatrix} = \vec{0}$

2- اگر S سطح خارجی رویه‌ای به معادله $z=a^2-x^2-y^2$ و C منحنی که از تلاقی S با صفحه $z=0$ حاصل می‌گردد و $F=(y,5,z)$ آنگاه

$\oint_C F\cdot dR = ?$ $\qquad \nabla\times F = -k$ $\qquad$ شرایط استوکس برقرار است

باید در xy تصویر شود

$$= \iint_R \frac{\vec{F}\cdot\vec{n}}{|n\cdot k|}\,dx\,dy = \iint \frac{-n\cdot k}{|n\cdot k|}\,dx\,dy = -\pi a^2$$



3- اگر C منحنی فصل مشترک $x^2+y^2=1$ و $z=0$ باشد آنگاه در xy

$\oint_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz =$ $\qquad$ می‌توان $z=0$ گذاشت معادله را

یا $\nabla\times F = 3(x^2+y^2)k$

$n=k$ $\qquad |n\cdot k|=1$

$(\nabla\times F)\cdot k = 3(x^2+y^2)$ $\qquad = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta$

مشتق سویی (جهتی):

مشتق تابع f در جهت بردار u در نقطه P_0 که یک بردار یکه باشد
بردار یکه باید یکه باشد

$$f'_{\vec{u}}(P_0) = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f(P_0) = |u| \cdot |\nabla f(P_0)| \cos\theta$$

ماکزیمم مشتق در $\theta = 0$ است = ماکزیمم تغییرات در جهت بردار گرادیان است

اندازه بیشترین تغییرات اندازه بردار گرادیان است.
جهت 〃 〃 〃 جهت 〃 〃 〃.
〃 کمترین 〃 عکس 〃 〃 〃 〃.

۱- مشتق سوئی f در $(2,4,3)$ در جهت بردار $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{k}$ کدام است؟

$f = 2x^2 + 3y^2 + z^2$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(i - 2k)$ $\qquad \nabla f(2,4,3) = 8i + 24j + 6k$

$f'_{\vec{v}}(2,4,3) = \frac{1}{\sqrt{5}}(8 - 12)$

2- $f = (x^2 + y^2)$

$(1,0)$ $\quad u = i + j$ $\qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$

$\vec{\nabla} f(1,0) = 2i$

3- بزرگترین مشتق سوئی کدام است

$f = x^2 y^3 z^4$ $\qquad (1,1,1)$

$\nabla f(1,1,1) = 2i + 3j + 4k$

جهت مشتق max $\qquad f'_{\vec{u}} \max = \sqrt{29}$

جهت 〃 min منفی ∇f

۴- در کدام امتداد، با بیشترین سرعت تغییر می‌کند $w = x^2 - xy + 2z^2 + yz$

$(2,1,-1)$

$= 3i - 3j - 3k$

۵- بردار عمود بر سطح $z^2 = 4(x^2+y^2)$ در $(1,2,1)$ کدام است؟

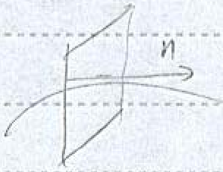
بردار عمود بر سطح در هر نقطه‌ای، بردار گرادیان است $\vec{N} = 8i + 16j - 2k$

۶- معادله صفحه مماس بر z در نقطه $(1,1,2)$ کدام است

$z = x^2 + y^2$

$\vec{n} = 2i + 2j - k$ $\qquad 2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$

۷- معادله صفحه قائم بر $r(t) = e^t i + (t+1) j + \ln(1+t) k$ در $t=0$ کدام است.



$r'(t) = e^t i + j + \frac{1}{1+t} k$

$r'(0) = i + j + k$ بردار عمود بر صفحه قائم

$r(0) = i + j \qquad (1,1,0)$

$\Rightarrow$ معادله صفحه قائم $(x-1) + (y-1) + z = 0$

Month. Date. ( )

دو منحنی وقتی برهم مماس هستند که زاویه بین مماس‌های آنها صفر باشد.

دو صفحه وقتی برهم قائم هستند که گرادیان آنها در آن نقطه برهم قائم باشند.

8 - نمودار این معادله در فضا کدام است $2Z^2 - x^2 - y^2 = 1$

هذلولی وار یکپارچه

✓ هذلولی وار دو پارچه

سهمیوار هذلولی

مخروط

9 - مخروط $x^2 + y^2 = Z^2$

برای بدست آوردن خط مماس بر محل تلاقی دو منحنی باید حاصلضرب خارجی دو بردار نرمال دو منحنی در نقطه تماس را بدست آورد.

10 - معادله صفحه مماس بر منحنی $\begin{cases} y = x^2 \\ z^2 = 16 - y \end{cases}$ در نقطه $(4, 16, 0)$ کدام است

جواب: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}$ => یک خط = محل مشترک دو صفحه

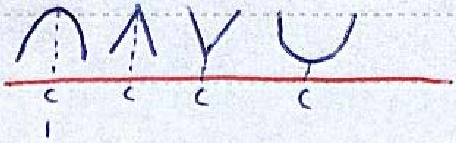
$N_1 = -2xi + j$

$N_2 = j + 2Zk$

$$N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8k$$

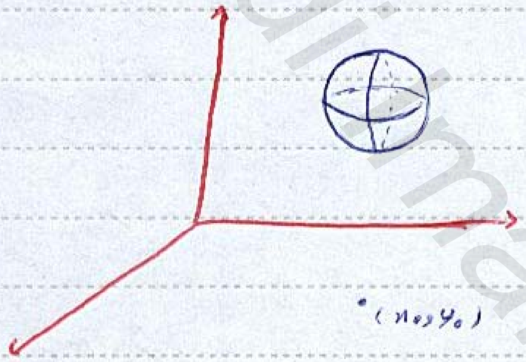
PAPCO

اکسترمم توابع دو متغیره



$x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$ صعودی

تعریف ماکزیمم نسبی برای توابع یک متغیره: $I:\ c \in I,\ f(c) \geq f(x) \quad \forall x \in I$



$f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$

برای تعیین اکسترمم نسبی در توابع دو متغیره می توان از آزمون مشتق مرتبه اول استفاده کرد.

اکسترممهای نسبی در نقاطی شکل می گیرند مشتق در آن نقاط صفر شود یا وجود نداشته باشد

* فرض کنید تابع $z = f(x,y)$ در یک همسایگی از $P_0(x_0,y_0)$ تعریف شده باشد گوییم f در P_0 دارای مینیمم نسبی (ماکزیمم نسبی) می باشد اگر یک همسایگی از P_0 وجود داشته باشد به طوریکه برای هر (x,y) در آن همسایگی $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$.
$(\leq)$

قضیه اگر تابع $z = f(x,y)$ در نقطه P_0 به اکسترمم خود برسد آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول در آن نقطه برابر صفر هستند یا وجود ندارند.

تعریف نقطه (x_0,y_0) را یک نقطه بحرانی برای تابع f گوییم اگر f در (x_0,y_0) مشتق پذیر نباشد و یا

مشتق نسبت به
هر دو با هم
$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

Year. Month. Date. ( )

آن نقاط بحرانی که منجر به مقادیر اکسترمم نسبی نمی‌شوند را نقطه زینی می‌نامیم

اگر نقطه (x_0,y_0) یک نقطه بحرانی باشد و فرض کنیم $A=f_{xx}(x_0,y_0)$ و $B=f_{xy}(x_0,y_0)$ و $C=f_{yy}(x_0,y_0)$ و $D=B^2-AC$

الف) $D>0$ ⇐ نقطه زینی

ب) $D=0$ ⇐ ـــــ نتیجه نمی‌دهد

ج) $D<0$ ⇐ $A>0$ مینیمم نسبی

$A<0$ ماکزیمم نسبی

1- نقطه $(0,0)$ برای سطح به معادله $z=x^3+y^3-3xy$ چگونه نقطه‌ای است؟

ماکزیمم

مینیمم

زینی ✓

عادی

چون مرزی ندارد که مشتق وجود نداشته باشد = نقاط بحرانی

$$Z_x=3x^2-3y=0$$
$$Z_y=3y^2-3x=0$$
$\Rightarrow$ در دو دستگاه صدق می‌کند ⇐ نقطه بحرانی است $(0,0)$

$Z_{xx}=6x \Rightarrow A=0$

$Z_{xy}=-3=Z_{yx} \Rightarrow B=-3 \Rightarrow D=9$

$Z_{yy}=6y \Rightarrow C=0$

2- مینیمم تابع $z=x^2+2y^2-6x+4y+12$ کدام است

-2   1 ✓

0   3

$$\begin{cases} Z_x=2x-6=0 \\ Z_y=4y+4=0 \end{cases} \Rightarrow (3,-1)$$

PAPCO

$Z(3,-1) = 9 + 2 - 18 - 4 + 12 = -1$

$Z_{xx} = 2 = A$

$Z_{xy} = 0 = B$ $\quad D<0 \Rightarrow A>0 \Rightarrow$ مینیمم

$Z_{yy} = 4 = C$

3- نقطه $\left(-\frac{10}{9}, \frac{2}{9}\right)$ برای تابع $f = 2x^2 + 2xy + 5y^2 + 4x$

ماکزیمم نسبی

مینیمم نسبی ✓

زینی

نقطه بحرانی نمی باشد

$$\begin{cases} f_x = 4x + 2y + 4 = 0 \\ f_y = 2x + 10y = 0 \end{cases}$$

نقطه در معادله رو به رو صدق می کند $\Rightarrow$ بحرانی است

$f_{xx} = 4 = A$

$f_{xy} = 2 = B$ $\quad D<0 \Rightarrow A>0$

$f_{yy} = 10 = C$

4- مینیمم $f = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$ کدام است

$$\begin{cases} f_x = 2x - 4y = 0 \\ f_y = -4x + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$(4, 2) \Rightarrow f(4,2) = 0$ $\quad \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

دو نقطه را در معادله می گذاریم

هر کدام کمتر بود مینیمم است

$f_{xx} = 2$ $\quad A$

$f_{xy} = -4$ $\quad B$

$f_{yy} = 6y$

چون حساب کردن اکسترمم مشکل است می توانیم نقاط داده شده را به رو به رو بگذاریم و هر کدام که $D<0$ و $A>0$ را داد آن مینیمم ما خواهد بود $\Rightarrow$ در تابع می گذاریم و f_{min} را بدست می آوریم

5- نقطه بحرانی $Z = x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 7y$ کدام است؟

$$\begin{cases} Z_x = 2x - 3y - 5 = 0 \\ Z_y = -3x + 4y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1, -1)$$

6- کدام یک از نقاط زیر مینیمم نسبی تابع $f = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$ است؟ !

$$\begin{cases} f_x = 6x + 2y + 2 = 0 \\ f_y = 2x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \left(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}\right)$$

7- ماکزیمم $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ کدام است؟

$$\begin{cases} f_x = e^{-(x^2+y^2)}\left(2x - 2x(x^2+y^2)\right) = 0 & x = 0 \text{ یا } x^2+y^2 = 1 \\ f_y = e^{-(x^2+y^2)}\left(2y - 2y(x^2+y^2)\right) = 0 & y = 0 \text{ یا } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

در تابع گذاشته شود — مقدار بیشتر را $f(x,y)$ ⇐ نقاط $x^2+y^2=1$ ماکزیمم می‌سازد ⇐ $f = e^{-1}$

1) 1
2) $2e^{-2}$
3) e^{-1} ✓
4) $\frac{1}{2}e^{-1/2}$

ماکزیمم و مینیمم مشروط (مقید)!

فرض کنید می‌خواهیم اکسترمم تابع $z = f(x,y)$ را با شرط $g(x,y) = 0$ تعیین کنیم برای این کار از تابع لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$U = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = f_x + \lambda g_x = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = f_y + \lambda g_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & U_{xx} & U_{xy} \\ g_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix}$$

$\bar{J} < 0$ مینیمم نسبی

$\bar{J} > 0$ ماکسیمم نسبی

$\bar{J} = 0$ جواب نمی دهد

۱- مینیمم مقدار تابع $Z = x^2 + y^2 - 2x$ با شرط $3x+2y=3$ کدام است؟

y را از معادله شرط بدست آوریم در تابع قرار دهیم مشتق بگیریم ⇐ مقدار مینیمم را حساب کنیم (از نقاط بحرانی مشتق)

$$Z = x^2 + \frac{9}{4}(1-x)^2 - 2x$$

$$Z' = 2x - \frac{9}{2}(1-x) - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Z_{min} = -1$$

راه دوم
$$U = x^2 + y^2 - 2x + \lambda(3x + 2y - 3)$$

$$g = 3x + 2y - 3$$

$$\begin{cases} U_x = 2x - 2 + 3\lambda = 0 & \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{2}\lambda \\ U_y = 2y + 2\lambda = 0 & \Rightarrow y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow (1,0)$$

$$3x + 2y = 3 \Rightarrow 3 - \frac{9}{2}\lambda - 2\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\bar{J} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 6 + 2(-4) = < 0 \Rightarrow (1,0) \text{ مینیمم}$$

$$Z(1,0)_{min} = -1$$

اگر در مشتقات g متغیرهای اولیه باشد باید مقادیر (x_0, y_0) را در g قرار بدهیم زیرا تمام اعضای $\bar{J}$ عدد هستند

Year. Month. Date. ( )

2- مقدار min تابع $z = x^2 - y^2$ به شرط $x + 2y = 6$ کدام است؟

$z_{min} = -12$

3- طول وتر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع x و y برابر $\sqrt{5}$ است. بیشترین مقدار $x+y$ کدام است؟

$f = x + y$

$x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow g = x^2 + y^2 - 5 = 0$

$f = \sqrt{5 - x^2} + x$

$u = x + y + \lambda (x^2 + y^2 - 5)$

$f' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$

$$\begin{cases} u_x = 1 + 2x\lambda = 0 & x = -\frac{1}{2\lambda} \\ u_y = 1 + 2y\lambda = 0 & y = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases}$$

$x = \pm\sqrt{5}$ $\quad 5 - x^2 = 1$ $\quad x = \pm 2$

$f'' = \frac{-1(\sqrt{5 - x^2}) - \frac{x^2}{\sqrt{5 - x^2}}}{5 - x^2}$

منفی قابل قبول است تا اعداد مثبت شود

$\frac{1}{2\lambda^2} = 5 \quad \lambda^2 = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

4- مقدار ماکسیمم و مینیمم $f = 3x + 4y$ بر دایره $x^2 + y^2 = 1$ کدام است؟

آیا استاد را می‌توان از ترسیمات هم حساب کرد؟ در آن را نقطه بیست داریم

$f_{max} = 5$

$f_{min} = -5$

5- کوتاه ترین و بلند ترین فاصله مبدأ از خم $x^2 + xy + y^2 = 16$ کدام است؟

$\text{ضابطه} = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \text{شرط} = x^2 + xy + y^2 = 16$

$f = x^2 + y^2 \Rightarrow g = x^2 + xy + y^2 = 16$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$2\lambda x + y\lambda$$

$$x\times \begin{cases} U_x = 2x + \lambda(2x+y) \\ \quad\quad \lambda x + 2y\lambda \\ -y\times\ U_y = 2y + \lambda(x+2y) = 0 \\ g = x^2 + xy + y^2 - 16 \end{cases}$$

$\lambda = -1 \ , y = \pm x$

$2x^2(1+\lambda) = 0 \quad , \quad 2y^2(1+\lambda) = 0$

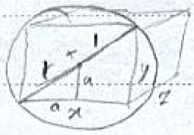
$\lambda \neq -1 \Rightarrow x, y = 0 \Rightarrow$ فاصله صفر می‌شود

$\lambda = -1 \Rightarrow$ صادق نیست

$x = y \Rightarrow f_{max} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

$x = -y \Rightarrow f_{min} = 4\sqrt{2}$

6- بیشترین حجم مکعب مستطیلی که داخل کره به شعاع ۱ واحد قرار می‌گیرد کدام است



$V = xyz$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \longrightarrow$ مربع قطر $\Rightarrow V_{max} = \frac{8}{9}\sqrt{3}$

در بیشترین مقدار یک مکعب است

PAPCO

7 - نقطه min تابع $f=4x^2+y^2+z^2$ با شرط $2x+3y+z=12$ کدام است = ?

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$$

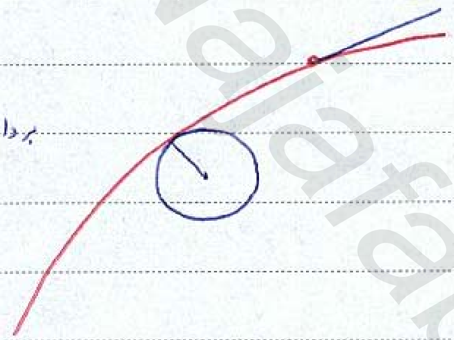
$$8x\,i + 2y\,j + 2z\,k = 2\lambda\, i + 3\lambda\, j + k\lambda$$

$$\begin{cases} 8x = 2\lambda \\ 2y = 3\lambda \\ 2z = \lambda \end{cases} \qquad 2x+3y+z=12 \qquad \begin{cases} x = \frac{\lambda}{4} \\ y = \frac{3}{2}\lambda \\ z = \frac{\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{24}{11}$$

$$\left(\frac{6}{11}, \frac{36}{11}, \frac{12}{11}\right)$$

چون min خواسته همین نقطه برای نقطه min می‌باشد

بردار یکانی مماس قائم اول و دوم:



$$c: \vec{R(t)} = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R'}(t)}{|\vec{R'}(t)|}$$ بردار یکانی مماس اول

$$\vec{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$ بردار قائم یکانی اول

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$ بردار یکانی قائم دوم

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |R'(t)|\, dt$$ طول قوس از t_1 تا t_2

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انحنا (مستقل از پارامتر)

$$k = \frac{|R' \times R''|}{|R'|^3}$$

انحناء

شعاع انحنا $\rho = \frac{1}{k}$ ،

اگر در صفحه باشیم و داشته باشیم

$$y = f(x)$$

$$\Rightarrow k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

اگر در صفحه باشیم و معادلات به صورت پارامتری باشد

$$R(t) = x(t)i + y(t)j$$

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

اگر در صفحه باشیم و معادلات به صورت قطبی باشد

$$r = f(\theta)$$

$$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}$$

بحث دایره بوسان فقط در صفحه مطرح می شود

if : $y = f(x)$ مختصات مرکز دایره بوسان از روابط زیر بدست می آید =

$$x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \quad , \quad y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Year. Month. Date. ( )

۱- اگر $\alpha(t) = (6\sin 2t, 6\cos 2t, 5t)$ آنگاه خمیدگی α در $(0,6,0)$ کدام است ؟

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12\cos 2t & -12\sin 2t & 5 \\ -24\sin 2t & -24\cos 2t & 0 \end{vmatrix} = 120\cos 2t\, i - 120\sin 2t\, j - 12 \times 24\, k$$

$$|120 i - 12 \times 24 k| = 24 \times 13$$

$$|\alpha'| = |12 i + 5k| = 13$$

$$k(0) = \frac{24 \times 13}{(13)^3} = \frac{24}{169}$$

۲- $\vec{R}(t) = (\sin t, \cos t, \frac{1}{2}t^2)$ انحنای منحنی در $t=0$ کدام است ؟

$$k = \sqrt{2}$$

$$|R' \times R''| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & -\sin t & t \\ -\sin t & -\cos t & 1 \end{vmatrix} \right| = \sqrt{2}$$

$$|R'| = 1 \qquad k = \sqrt{2}$$

درستیم در صفحه ا ...

۳- انحنای منحنی $\vec{R}(t) = (\frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}, 0)$ کدام است ... درصفحه

$$k = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}} \qquad k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

$$k = \frac{t^2 - 2t^2}{(t^4+t^2)^{3/2}}$$

قدر مطلق

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

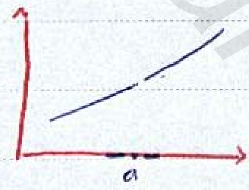
اگر $k=0$ ⟸ $\rho=\infty$ ⟸ منحنی ما به صورت خط صاف می‌باشد که شعاع دایره بوسان (ا) آن ∞ است

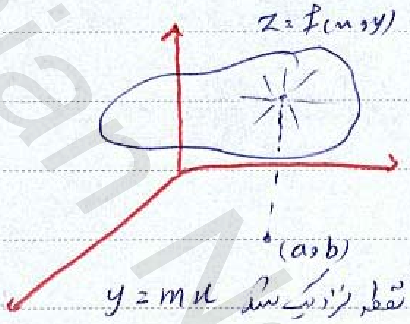
منحنی به شکل خط صاف است ⟸ $R' \neq 0$ و $|R' \times R''| = 0$ مثلاً

حد و پیوستگی:

تابع وقتی حد دارد که وقتی ما از همه طرف به آن نزدیک شویم مقدار تابع تغییر نکند

در رویه‌های فضایی دیگر حد چپ و راست مطرح نیست زیرا از جهات متفاوت زیادی باید به نقطه مورد نظر نزدیک شد.





معمولاً می‌توان از روی این خط به نقطه نزدیک شد $y=mx$ اگر به m بستگی پیدا کرد تابع حد ندارد ولی اگر به m بستگی پیدا نکرد نمی‌توان گفت حد موجود حاصل است ولی می‌توان گفت

اگر $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \Rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$

حد داشته باشد در آن جا

| فاصله (قدر مطلق نیست) عدد است ″ ″ به |

در نتیجه $|f(x)-L|<\varepsilon$

⟸ اگر در گرایش‌ها «حد ندارد» وجود نداشت‌ها با عدد جدا است

Year. Month. Date. ( )

حدود مکرر:

$$\lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right] = L_{12}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right] = L_{21}$$

* اگر L_{12} و L_{21} هر دو موجود و مخالف باشند حد ندارد. وجود حد و مساوی بودن، دلیل بر حدیت نیست بلکه به این معناست که اگر حد وجود داشته باشد همان عدد است.

* اگر یکی حد و دیگری بینهایت شد می‌توان گفت حد ندارد ولی اگر داشته باشد حد آن همان عدد است.

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

۱- $\lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] = 0$$

$$y = mx \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 m}{x\sqrt{1+m^2}} = 0$$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

اگر برقرار بود حد دارد (و حد آن) صفر است

$$\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < \frac{|x||y|}{|y|} = |x| \longleftarrow \sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{y^2}$$

δ را مساوی ε می‌گیریم

$$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |x| < \delta = \varepsilon$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- تابع با ضابطهٔ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ a & x=y=0\end{cases}$ مجموعه مقادیر a را طوری بیابید که f پیوسته شود؟

تست
تابع حد ندارد در $(0,0)$

3- حاصل حد $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x+e^y}{\cos x+\cos y}$ کدام است؟

به جای x و y ، $(0,0)$ می‌گذاریم

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = 1$

4- $f=\sin\dfrac{y}{x}$ در کدام نقاط ناپیوسته است؟ محور y ها

5- حد $\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ در $(0,0)$ کدام است؟

0

1

وجود ندارد ✓

2

$L_{12}=L_{21}=0$

$y=mx \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2mx^3}{x^4+m^2x^2}=0$

$y=x^2 \quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{x^4+x^4}=1\neq 0 \Rightarrow$ تابع حد ندارد

6-

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{x} \times \dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2}$

برای هوپیتال نمی‌توان دو متغیر باشد

و هوپیتال برای یک متغیره صادق است

PAPCO

Year. Month. Date. ( )

7. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$L_{12} = L_{21} = 0$

$y = mx \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} =$ به m بستگی پیدا کرد ⇐ تابع حد ندارد

f در (0,0) پیوسته است

" " دارای مشتقات نسبی است

✓ " " حد ندارد

" " مشتق پذیر است

8. در کدام نقاط مشتق پذیر است

$f = \dfrac{x^2+y^2}{y}$ تابع گویا در دامنه‌اش مشتق پذیر است

R

✓ در هر نقطه از دامنه‌اش

همه جا بجز (0,0)

9. در $r=s=1$ جواب $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ کدام است

$u = x^2 + xy$

$x = r^2 + s^2$

$y = 3r - 2s$

$\dfrac{\partial u}{\partial s} = ? = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)(2s) + x(-2) = 6$

10.

$u = x^2 + y^2 + z^2$

$v = x + y + z$

$w = xy + yz + xz$

$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = ? = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$

PAPCO

ect:

Year. Month. Date. ( )

$$Z = y\,\phi(x^2 - y^2)$$ -11

$$\frac{1}{x} Z_x + \frac{1}{y} Z_y = ? \qquad = \frac{Z}{y^2}$$

$$Z_x = 2xy\,\phi(x^2 - y^2)$$

$$Z_y = \phi(x^2 - y^2) - 2y^2 \phi(x^2 - y^2)$$

$u = x^2 + y^2$ -12

$x = 4s - 3t$

$y = st^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ? \qquad t = s = 0 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 18$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2x(-3) + 2y(2st)$$ به جای x و y مقادیر پارامتری آنها را وارد می‌کنیم

تابع $f(x,y,z)$ را همگن از درجه α گوییم اگر به جای x و y و z مقدار λx، λy، λz بگذاریم مقدار λ^α را فاکتور دهد و خود تابع بدست آید

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x,y,z)$$

اگر f تابعی همگن از درجه α باشد آنگاه

$$x f_x + y f_y + z f_z = \alpha f$$

Year. Month. Date. ( )

۱- $Z=\frac{x-3y}{xz} \Rightarrow xZ_x+yZ_y=?$

تابع همگن از درجه ۱- $\Rightarrow \alpha=-1$

$\Rightarrow xZ_x+yZ_y=-1\cdot Z$

۲- $Z=\sin^{-1}\frac{x}{y} \Rightarrow xZ_x+yZ_y=?$

همگن از درجه صفر $\alpha=0 \Rightarrow xZ_x+yZ_y=0\cdot Z=0$

۳- $f=x^2+y^2\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} \Rightarrow xf_x+yf_y=?=2f$

همگن از درجه ۲ $\alpha=2$

قضیه: اگر $F(u)=f(x,y,z)$ و f همگن از درجه α باشد آنگاه

$$xu_x+yu_y+zu_z=\alpha\frac{F(u)}{F'(u)}$$

۱- $u=\sin^{-1}\frac{x^2+y^2}{x+y} \Rightarrow xu_x+yu_y=?=\operatorname{tg}u=1\cdot\frac{\sin u}{\cos u}$

u همگن از درجه ۱ است ولی $\sin u$ همگن نیست زیرا λ از زیر قوس بیرون نمی‌آید مگر اینکه در داخل قوس با مخرج حذف شود

$$\sin u=\frac{x^2+y^2}{x+y}$$

ect:
Year. Month. Date. ( )

$$u = \ln \frac{x^4+y^4}{x-y} \Rightarrow xu_x + yu_y = ? \quad 3 \times \frac{F(u)}{F'(u)}$$ 2 -

$$e^u = \frac{x^4+y^4}{x-y} \Rightarrow \lambda = 3$$

3- بردار ویژه متناظر به بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ کدام است؟

$\lambda(i-2j)$

$\lambda(2i-j)$

$\lambda(2i+j)$

$\lambda(i+2j)$ ✓

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & \\ & a_{22}-\lambda & \\ & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$ معادله مشخصه

یعنی به مقادیر ویژه ندارد

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (5+\lambda)(2+\lambda)-4 = 0 \qquad \lambda = -1 , -6$$

ریشه‌های معادله مشخصه را مقادیر ویژه گویند.

ماتریس

$$AX = \lambda X$$

X را بردار ویژه گویند

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5a+2b=-a \\ 2a-2b=-b \qquad 2a=b \end{cases}$$

فرض $a=1 \Rightarrow b=2$

$i \qquad 2j$

Year. Month. Date. ( )

4 - کدام بردار یک بردار ویژه $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1 , \lambda = 6$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5a + 4b = a \\ a + 2b = b \end{cases} \Rightarrow a = -b$$

5 - می دانیم $\lambda_1 = 2$ یک مقدار ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ و دترمینان آن 36 است دو مقدار دیگر کدام است

$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 36$ حاصلضرب مقادیر ویژه با دترمینان برابر است

$$\overset{18}{36} = 2 \times \lambda_2 \times \lambda_3$$

$Tr = $ جمع مقادیر روی قطر

$Tr(A) = $ مجموع مقادیر ویژه

$$3 + 5 + 3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3$$

6 - می دانیم $\lambda_1 = 3$ یک مقدار ویژه $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس A منفرد است دو مقدار دیگر کدام است.

ject:

Year. Month. Date. ( )

وقتی ماتریس منفرد است که دترمینان آن صفر شود

$\det T = 0 \Rightarrow$ یکی از مقادیر ویژه باید صفر شود

7. مقادیر ویژه ماتریس روبرو کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

درگزینه ها فقط (1, 1, 1) درست است $T_r = 3$

PAPCO

E_mail:mehdiimanian@yahoo.com
Mobile:+989133327321